THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *UNIVERSITE TOULOUSE III Paul Sabatier*
Discipline ou spécialité : *MATHEMATIQUES FONDAMENTALES*

Présentée et soutenue par *Anne GRANIER*
Le *6 juillet 2009*

Titre : *Un D-groupoïde de Galois pour les équations aux q-différences*

JURY
Guy CASALE, Université de Rennes I, Examinateur
Lucia DI VIZIO, Université de Paris VI, Rapporteur
Anne DUVAL, Université de Lille I, Examinateur
Frank LORAY, Université de Rennes I, Rapporteur
Emmanuel PAUL, Université de Toulouse III, Directeur
Jean-Pierre RAMIS, Université de Toulouse III, Examinateur
Jacques SAULOY, Université de Toulouse III, Directeur

Ecole doctorale : *Mathématiques Informatique et Télécommunications de Toulouse*
Unité de recherche : *Institut de Mathématiques de Toulouse - UMR 5219*
Directeur(s) de Thèse : *Emmanuel PAUL, Jacques SAULOY*
Rapporteurs : *Lucia DI VIZIO, Frank LORAY*

Thèse

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

en mathématiques fondamentales

Présentée et soutenue le 6 juillet 2009 par

Anne Granier

Intitulée

Un D-groupoïde de Galois pour les équations aux q-différences

JURY

Guy Casale	Université de Rennes I	Examinateur
Lucia Di Vizio	Université de Paris VI	Rapporteur
Anne Duval	Université de Lille I	Examinateur
Frank Loray	Université de Rennes I	Rapporteur
Emmanuel Paul	Université de Toulouse III	Directeur
Jean-Pierre Ramis	Université de Toulouse III	Examinateur
Jacques Sauloy	Université de Toulouse III	Directeur

Institut de Mathématiques de Toulouse, UMR 5219
Université Paul Sabatier, Toulouse III
31062 Toulouse, Cedex 9

Remerciements

Je tiens à remercier ici les personnes qui m'ont accompagnée tout du long de cete thèse, ainsi que tous ceux qui ont fait le bonheur et la richesse de mes années d'études à l'Université Paul Sabatier.

Mes premiers remerciements vont à Jacques Sauloy et Emmanuel Paul pour leurs qualités humaines, les compétences scientifiques avec lesquelles ils ont dirigé mon travail, la disponibilité et la patience qu'ils m'ont accordées. Je suis très heureuse et très fière d'avoir découvert la recherche mathématique à leurs côtés. C'est avant tout à eux deux que je dédie cette thèse, en témoignage de ma reconnaissance et de ma respectueuse affection.

Ma gratitude va ensuite à Jean-Pierre Ramis pour les perspectives mathématiques qu'il m'a proposées et la bienveillance dont il a toujours fait preuve à mon égard. Je remercie aussi très vivement Lucia Di Vizio et Frank Loray qui m'ont fait l'honneur de rapporter ce texte, Anne Duval et Guy Casale qui ont spontanément accepté de participer au jury.

Ces quatre années de thèse m'ont amenée à visiter d'autres universités, en France et à l'étranger. Je remercie ceux qui m'ont invitée pour leur accueil et pour m'avoir fait part de leurs questions et de leurs suggestions. Un merci tout particulier à Guy et Viktoria pour les deux journées de travail et d'hospitalité à Rennes, ainsi qu'à Mireille, Michèle et Claudine pour m'avoir rapidement intégrée à leur petit groupe à Kyoto.

Outside of France, doing mathematical research is impossible without speaking some English. I really thank Cécile for all the useful and nice English she taught me. She helped me a lot.

Je souhaite également témoigner ici de ma très sincère admiration et de ma reconnaissance pour la qualité du travail effectué par les enseignants et chercheurs de l'Institut de Mathématiques de Toulouse, pour leur investissement individuel et collectif. Je leur dois ma formation universitaire et professionnelle, mon attachement à l'université : un grand merci !

Je remercie aussi mes collègues, avec une pensée particulière pour Patrick Martinez, pour la confiance qu'ils m'ont accordée dans ma fonction de monitrice et la liberté d'initiative qu'ils m'ont laissée. Ce travail a été pour moi source d'intérêts, d'un réel épanouissement et de motivations actuelles et futures.

J'ai partagé ma vie à l'université avec des camarades étudiants et doctorants. Merci à tous, très nombreux, pour les coups de pouce, de souris et de maths, les tables de travail et les moments de détente que l'on a partagés, et pour votre constante bonne humeur !

Bien d'autres personnes m'ont soutenue pendant ces années. Je remercie mes parents, ma famille et mes amis pour leurs encouragements et leur affection. C'est également à eux que je dédie cette thèse.

Un D-groupoïde de Galois pour les équations aux q-différences

Anne Granier

Table des matières

1 Les D-groupoïdes de Malgrange **9**

1.1 Les systèmes différentiels . . . 10

1.1.1 Préliminaires . . . 10

1.1.2 Les systèmes différentiels . . . 15

1.1.3 Intégrabilité des systèmes différentiels . . . 21

1.2 Les D-groupoïdes . . . 24

1.2.1 Les groupoïdes ensemblistes . . . 24

1.2.2 Les groupoïdes d'ordre fini . . . 26

1.2.3 Les D-groupoïdes . . . 36

2 Un D-groupoïde de Galois pour les équations aux q-différences **41**

2.1 Les équations aux q-différences linéaires . . . 42

2.1.1 Equations et systèmes . . . 42

2.1.2 L'homographie $\sigma_q : z \mapsto qz$ . . . 43

2.1.3 Les systèmes aux q-différences réguliers . . . 44

2.1.4 Les systèmes aux q-différences fuchsiens . . . 45

2.1.5 Le corps des constantes . . . 48

2.2 La dynamique d'un système aux q-différences . . . 49

2.2.1 Dynamique d'un système aux q-différences linéaire . . . 49

2.2.2 Dynamique d'un système aux q-différences non linéaire . . . 50

2.3 La D-enveloppe de la dynamique . . . 51

2.3.1 Calcul du D-groupoïde de Galois de l'équation des constantes $x(qz) = x(z)$ . . . 51

2.3.2 Etude de quelques exemples élémentaires . . . 53

3 Un majorant pour le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire **59**

3.1 Le majorant $\sqrt{\mathcal{Q}'}$ . . . 60

3.2 Le majorant $\sqrt{\mathcal{L}in'}$ . . . 61

3.2.1 Le majorant $\sqrt{\mathcal{L}in'}$ . . . 61

3.2.2 Réduction des équations de $\mathcal{G}al(A(z))$ modulo $\sqrt{\mathcal{L}in'}$ . . . 62

3.2.3 Les solutions de $\mathcal{G}al(A(z))$ . . . 63

3.3 Le D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales . . . 64

3.3.1 Le D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales . . . 64

3.3.2 Groupes de solutions de $\widetilde{\mathcal{G}al}(A(z))$ . . . 65

3.3.3 Exemples . . . 66

3.4 Le majorant $\sqrt{\mathcal{C}onst'}$ . . . 69

3.4.1 Le majorant $\sqrt{\mathcal{C}onst'}$ . . . 69

3.4.2 Structure des groupes de solutions associés à chaque transversale . . . 69

4 Les systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants **73**
4.1 Structure des sous-groupes algébriques monogènes de $GL_n(\mathbb{C})$ 73
4.1.1 Les sous-groupes algébriques monogènes de $GL_n(\mathbb{C})$ 74
4.1.2 Décomposition de Jordan 75
4.1.3 Structure d'un sous-groupe algébrique monogène unipotent de $GL_n(\mathbb{C})$ 76
4.1.4 Structure d'un sous-groupe algébrique monogène diagonalisable de $GL_n(\mathbb{C})$. 76
4.2 Calcul du D-groupoïde de Galois 77
4.2.1 Préliminaires : algorithme de division et bases de Groebner 77
4.2.2 Calcul du D-groupoïde de Galois 79
4.2.3 Calcul du D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales 81
4.3 Groupe de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants . . . 82
4.3.1 La catégorie des représentations $\mathbb{C}$-linéaires de dimension finie de $\mathbb{Z}$ 82
4.3.2 Le groupe de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants 86
4.4 Comparaison du D-groupoïde de Galois et du groupe de Galois 89
4.4.1 Comparaison du D-groupoïde de Galois et du groupoïde ensembliste de Galois 89
4.4.2 Comparaison du D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales et du groupe de Galois 89

5 Un D-groupoïde de Galois local pour les systèmes aux q-différences fuchsiens **91**
5.1 Conjugaison des dynamiques 92
5.1.1 Lemme 92
5.1.2 Définition de la conjugaison 92
5.1.3 Exemples 94
5.2 Transport de la structure de D-groupoïde sur M^* 95
5.2.1 Transport de la structure de groupoïde d'ordre fini sur M^* 95
5.2.2 Transport de la structure de D-groupoïde sur M^* 97
5.3 Conjugaison des D-groupoïdes de Galois de deux systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants équivalents 97
5.3.1 Restriction des D-groupoïdes de Galois 97
5.3.2 Conjugaison des D-groupoïdes de Galois de deux systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants équivalents 98
5.3.3 Exemples 99
5.4 Un D-groupoïde de Galois local pour les systèmes aux q-différences fuchsiens 100
5.4.1 Le groupe de Galois local d'un système aux q-différences fuchsien 100
5.4.2 Un D-groupoïde de Galois local explicite pour un système aux q-différences fuchsien 102

Introduction

La notion de D-groupoïde a été introduite par Malgrange dans [**?**] afin de définir, pour les équations différentielles non linéaires, un objet qui généralise le groupe de Galois différentiel des équations linéaires.
L'objet de cette thèse est d'adapter la construction de Malgrange aux équations aux q-différences, et de justifier notre construction en montrant que, pour les équations aux q-différences linéaires, elle redonne le groupe de Galois.

Contexte

Le D-groupoïde de Galois d'un système différentiel

Un D-groupoïde est, essentiellement, un sous-groupoïde du groupoïde des germes de difféomorphismes locaux d'une variété complexe lisse, défini par un système d'équations aux dérivées partielles.
La définition de D-groupoïde de Malgrange, introduite dans [**?**], est une version moins contraignante des pseudo-groupes de Lie. Elle permet d'accepter un lieu singulier dans les équations définissant le D-groupoïde, et ainsi de définir une enveloppe, dans un sens à préciser, d'un groupoïde ensembliste de germes de difféomorphismes locaux d'une variété.

Malgrange a développé la notion de D-groupoïde afin de définir, pour les équations différentielles non linéaires, un objet qui généralise le groupe de Galois différentiel des équations différentielles linéaires.
On considère par exemple un système différentiel $X' = F(z, X)$ défini sur $P^1\mathbb{C}$, de taille n et *a priori* non linéaire et singulier. On considère ensuite le feuilletage singulier associé. On considère enfin le groupoïde d'holonomie de ce feuilletage, c'est-à-dire le groupoïde des germes de difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ qui laissent globalement invariante chaque feuille du feuilletage, c'est-à-dire, essentiellement, chaque solution de l'équation.
On définit alors le D-groupoïde de Galois du système différentiel $X' = F(z, X)$ comme la D-enveloppe du groupoïde d'holonomie, c'est-à-dire comme le plus petit D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ contenant les transformations d'holonomie parmi ses solutions.
Les équations de ce D-groupoïde sont définies sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, ensemble qui inclut les singularités du feuilletage.

Le D-groupoïde de Galois d'un système différentiel est donc une enveloppe, de nature algébrique et différentielle, d'un objet transcendant qui représente sa dynamique. En ce sens déjà, et par exemple par analogie au théorème de Schlesinger[1], c'est un objet de nature galoisienne.
La définition du D-groupoïde de Galois d'une équation différentielle donnée dans [**?**] est aussi justifiée par le fait que le D-groupoïde de Galois d'un système différentiel linéaire redonne une description

[1] Le théorème de Schlesinger assure que le groupe de Galois différentiel d'un système différentiel fuchsien est l'adhérence de Zariski d'une réalisation du groupe de monodromie (*cf* [**?**], 5.1.1).

du groupe de Galois différentiel du système. La comparaison du D-groupoïde de Galois d'un système différentiel linéaire avec la définition tannakienne de son groupe de Galois différentiel est exposée dans [**?**], 5.3., et le lien de ce D-groupoïde avec l'extension de Picard-Vessiot du système est donnée dans [**?**], 5.3.

La première étape de la preuve de Malgrange consiste à mettre en évidence un majorant pour le D-groupoïde de Galois d'un système différentiel linéaire. C'est le D-groupoïde qui rend compte de la structure linéaire transverse du feuilletage défini par le système différentiel linéaire. Cette majoration permet de montrer que les solutions du D-groupoïde de Galois qui fixent les transversales du feuilletage correspondent aux éléments d'un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$. De plus, en considérant les transformations d'holonomie qui fixent les transversales, on obtient comme sous-groupe de ce groupe algébrique une réalisation du groupe de monodromie du système.
La seconde étape de la preuve consiste à montrer que ce groupe algébrique est le groupe de Galois différentiel du système.

Théorème (Malgrange, [**?**], 5.3.). *Le D-groupoïde de Galois d'un système différentiel linéaire donne, en considérant les solutions qui fixent les transversales du feuilletage, le groupe de Galois différentiel.*

Un groupe de Galois pour les équations aux q-différences linéaires

Les équations aux q-différences sont des équations fonctionnelles du champ analytique complexe. Elles sont définies à l'aide de l'homographie $z \mapsto qz$, qui agit de façon discrète et inversible sur la coordonnée complexe, et que l'on considère comme un opérateur sur les fonctions de la variable complexe, dans le sens : $f(z) \mapsto f(qz)$.

Il existe plusieurs approches différentes pour définir un groupe de Galois pour les équations aux q-différences linéaires. La principale difficulté est que, contrairement au cas différentiel, le corps des constantes naturel est le corps des fonctions elliptiques, et par conséquent, les espaces vectoriels de solutions que l'on peut construire pour de tels systèmes sont des espaces vectoriels sur le corps des fonctions elliptiques.

Les premiers travaux pour définir un groupe de Galois pour les équations aux q-différences ont été effectués par Etingof dans le cas très particulier des équations aux q-différences régulières.
Ensuite, van der Put et Singer ont apporté une définition générale dans [**?**]. Ils utilisent des solutions symboliques pour lesquelles le corps des constantes est encore $\mathbb{C}$. Ces solutions permettent de définir un groupe de Galois à la fois par une théorie à la Picard-Vessiot, et par dualité tannakienne.

Sauloy met en place dans [**?**] une approche analytique de la théorie de Galois des systèmes aux q-différences fuchsiens.
Cette approche combine la dualité de Tannaka avec la méthode de classification de Birkhoff à l'aide des données locales en 0 et ∞, et de la matrice de connexion.

La catégorie tannakienne des systèmes aux q-différences fuchsiens locaux décrite dans [**?**] contient, comme sous-catégorie essentielle, la catégorie des représentations du groupe $\mathbb{Z}$. Cela permet de décrire son groupe de Galois comme un sous-groupe de l'enveloppe pro-algébrique de $\mathbb{Z}$, et de décrire des sous-groupes fondamentaux.
Plus qu'un groupe, la famille de foncteurs fibres définis dans [**?**] met en évidence un groupoïde ensembliste de Galois, dont les flèches sont les isomorphismes tensoriels entre deux foncteurs fibres de cette famille.

Ensuite, la catégorie tannakienne des systèmes aux q-différences fuchsiens (en 0 et en ∞) ad-

met deux plongements respectifs dans les catégories tannakiennes des systèmes aux q-différences localement fuchsiens, respectivement en 0 et ∞. Cela permet de donner deux familles de foncteurs fibres pour la catégorie tannakienne des systèmes aux q-différences fuchsiens, et par conséquent, un groupoïde ensembliste de Galois global.
Les groupoïdes ensemblistes de Galois locaux se plongent dans le groupoïde ensembliste de Galois global. Sauloy montre que ces données locales, avec les évaluations des matrices de connexion, engendrent au sens de Zariski le groupoïde ensembliste de Galois global. Cela constitue un théorème de densité de type Schlesinger. En particulier, on a le théorème de densité ci-dessous pour le groupe de Galois global d'un système aux q-différences fuchsien en 0 et ∞.

Théorème (Sauloy, [**?**], 3.1.2)**.** *Pour un système aux q-différences fuchsien, les groupes de Galois locaux en 0 et ∞, combinés avec les évaluations (en dehors d'un lieu singulier) de la matrice de connexion, engendrent, au sens de Zariski, le groupe de Galois du système.*

Présentation des résultats

Le **premier chapitre** de cette thèse est consacré à la présentation de la notion de D-groupoïde de Malgrange.
Nous illustrons les définitions des structures introduites sur un exemple de D-groupoïde issu du contexte des équations aux q-différences. C'est le D-groupoïde des germes de difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \bar{X}(z, X))$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\bar{X}$ quelconque. C'est un majorant naturel du D-groupoïde de Galois de tout système aux q-différences.

Dans le **second chapitre** de cette thèse, nous définissons le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences.
On commence par définir, pour un système aux q-différences, un groupoïde ensembliste qui représente sa dynamique, et qui joue un rôle analogue au groupoïde d'holonomie du cas différentiel.

Définition (2.2.3)**.** *La dynamique d'un système aux q-différences non linéaire $\sigma_q X = F(z, X)$ est le groupoïde ensembliste des germes de difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ engendré par les difféomorphismes locaux de la forme*

$$(z, X) \mapsto (qz, F(z, X))$$

De façon analogue au cas différentiel, on définit ensuite le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences. C'est l'enveloppe, au sens des D-groupoïdes, de la dynamique du système, c'est-à-dire le plus petit D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ contenant les éléments de la dynamique du système parmi ses solutions.

Définition (2.3.1)**.** *Le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences non linéaire $\sigma_q X = F(z, X)$ est le plus petit D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ contenant les éléments de la dynamique du système parmi ses solutions.*

Les trois derniers chapitres de cette thèse sont consacrés à l'étude du D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire.

Dans le **troisième chapitre**, on met en évidence un majorant naturel pour le D-groupoïde de Galois d'un système différentiel linéaire. Il rend compte de la forme particulière commune aux éléments de la dynamique d'un tel système.
Le calcul de ce majorant permet de montrer que le caractère local des solutions du D-groupoïde de Galois d'un tel système ne vaut que pour leur composante selon $P^1\mathbb{C}$.

Théorème (3.2.5)**.** *Les solutions du D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire sont naturellement définies au voisinage de transversales de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$.*

Ce théorème permet de définir, en considérant les solutions du D-groupoïde de Galois qui fixent les transversales, un groupe de matrices candidat à redonner le groupe de Galois du système.
En revanche, contrairement au cas différentiel, ce groupe n'est pas un groupe algébrique de matrices constantes, et de plus, comme aucun des éléments non triviaux de la dynamique d'un système aux q-différences ne fixe les transversales de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, on ne peut donner une interprétation dynamique immédiate à aucun élément de ce groupe.

Dans le cas particulier des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants, on peut mettre en évidence un majorant plus fin pour le D-groupoïde de Galois d'un tel système, et ainsi montrer que le groupe obtenu est un groupe algébrique de matrices constantes.

L'objet du **quatrième chapitre** est donc d'étudier le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants.
On calcule explicitement le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences à coefficients constants $\sigma_q X = AX$, avec $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Ce D-groupoïde dépend du sous-groupe algébrique monogène $G(J)$ de $GL_{n+1}(\mathbb{C})$ engendré par les matrices jacobiennes des éléments de la dynamique du système, à savoir les matrices

$$J^k = diag(q^k, A^k) = \begin{pmatrix} q^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$$

Théorème (4.2.7)**.** *Les solutions du D-groupoïde de Galois du système aux q-différences linéaire à coefficients constants $\sigma_q X = AX$, avec $A \in GL_n(\mathbb{C})$, sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme*

$$(z, X) \mapsto (\alpha z, \beta X)$$

avec $diag(\alpha, \beta) \in G(J)$.

Théorème (4.2.9)**.** *Le sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$ obtenu en considérant les solutions du D-groupoïde de Galois de $\sigma_q X = AX$ qui fixent les transversales est le groupe G_A suivant :*

$$G_A = \{\beta \in GL_n(\mathbb{C}) \,:\, diag(1, \beta) \in G(J)\}$$

On rappelle ensuite la définition tannakienne et la description de Sauloy du groupe de Galois $Gal(A)$ du système aux q-différences $\sigma_q X = AX$ et on obtient, pour les systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants, le résultat cherché. A savoir :

Théorème (4.4.2)**.** *Le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants redonne, en considérant les solutions qui fixent les transversales de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, le groupe de Galois du système.*

Plus qu'un groupe, la description de Sauloy met en évidence un groupoïde ensembliste de Galois. On a le résultat plus général suivant :

Théorème (4.4.1)**.** *Pour deux points $z_0, z_1 \in \mathbb{C}^*$, les solutions du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A)$ du système aux q-différences $\sigma_q X = AX$ qui transforment la transversale $\{z_0\} \times \mathbb{C}^n$ en la transversale $\{z_1\} \times \mathbb{C}^n$ correspondent exactement aux arêtes entre les points base z_0 et z_1 du groupoïde ensembliste de Galois de Sauloy.*

Le **cinquième et dernier chapitre** de cette thèse concerne l'étude du lien qui doit exister entre les D-groupoïdes de Galois de deux systèmes aux q-différences équivalents.

Deux systèmes aux q-différences linéaires rationnels sont équivalents si, essentiellement, on peut transformer l'un en l'autre par un changement linéaire et rationnel de fonction inconnue.
On montre que, en dehors d'un lieu singulier, les dynamiques de deux tels système sont conjuguées.
On montre ensuite que cette conjugaison préserve la structure de D-groupoïde, et qu'elle permet donc de transporter des D-groupoïdes définis en dehors de ce lieu singulier.

En revanche, les D-groupoïdes de Galois de systèmes aux q-différences sont des D-groupoïdes définis sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ tout entier.
On parvient à montrer que, dans le cas de deux systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants équivalents, la conjugaison des dynamiques transforme les restrictions des D-groupoïdes de Galois, et par conséquent conjugue leurs solutions.

Théorème (5.3.4)**.** *Pour deux systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants équivalents, la conjugaison des dynamiques définit, sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$, un comorphisme qui conjugue les restrictions des D-groupoïdes de Galois. Par conséquent, la conjugaison des dynamiques conjugue également les solutions des D-groupoïdes de Galois.*

Ce théorème permet de définir, de façon analogue à la définition dans [**?**] d'un groupe de Galois local, un D-groupoïde de Galois local pour un système aux q-différences fuchsien. Une réalisation de ce D-groupoïde de Galois local est le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants qui lui est localement équivalent. Le théorème ci-dessus assure que les différents choix possibles de réalisation sont compatibles.

On peut également définir directement le D-groupoïde de Galois local d'un système aux q-différences fuchsien en 0 comme le plus petit D-groupoïde sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ contenant la dynamique parmi ses solutions. Il reste alors à établir un lien direct entre ce D-groupoïde et le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants localement équivalent au système fuchsien.
Ce résultat permettrait alors de retrouver, parmi les solutions qui fixent les transversales du D-groupoïde de Galois global d'un système aux q-différences fuchsien en 0 et ∞, une partie dense du groupe de Galois.

Chapitre 1

Les D-groupoïdes de Malgrange

La notion de D-groupoïde a été introduite par Malgrange dans [**?**] afin de définir, pour les équations différentielles non-linéaires, un objet qui généralise le groupe de Galois différentiel des équations linéaires.

Un D-groupoïde permet de définir une enveloppe, dans un sens à préciser, d'un groupoïde ensembliste de germes de difféomorphismes locaux d'une variété complexe lisse M. Essentiellement, cette enveloppe est donnée par les relations algébriques et différentielles qui sont vérifiées par les difféomorphismes locaux, et qui respectent leur structure de groupoïde ensembliste.
La définition de Malgrange de D-groupoïde est une version moins contraignante des pseudo-groupes de Lie : elle permet d'accepter un lieu singulier dans les équations définissant le D-groupoïde et de considérer des situations naturelles ne remplissant pas partout des conditions de régularité.

Je reprends dans ce chapitre la notion de D-groupoïde en vue de son utilisation pour définir un D-groupoïde de Galois pour les équations aux q-différences. Cependant, je ne détaillerai pas toutes les définitions. J'indiquerai les références dans lesquelles elles sont exposées dans un cadre général et je les spécialiserai ici à la situation que l'on a en vue.

Afin d'illustrer les définitions des structures introduites, je décrirai la structure de D-groupoïde de l'ensemble des germes de difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, F(z, X))$, pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$. C'est un majorant commun des D-groupoïdes de Galois des systèmes aux q-différences de taille n.

Dans la rédaction de cette partie, je resterai fidèle à mon cheminement et mon avancement dans la compréhension des sources étudiées, principalement [**?**], [**?**] et [**?**]. Cela est passé par la découverte du vocabulaire utilisé pour étudier les systèmes différentiels et les théorèmes d'existence de solutions.

Un D-groupoïde est un type particulier de système différentiel. On commencera donc par définir ces objets qui, en termes précis, seront des D-sous-variétés fermées de la D-variété des jets de difféomorphismes locaux de M. On illustrera ces définitions sur des exemples et l'on énoncera les théorèmes d'existence de solutions des systèmes différentiels.

Ensuite, on décrira la structure de groupoïde ensembliste de l'ensemble des germes de difféomorphismes locaux de M et l'on verra comment elle se transporte à la D-variété des jets de difféomorphismes locaux de M. Ceci permet de donner une caractérisation naturelle des systèmes différentiels sur M dont l'ensemble des solutions est un groupoïde ensembliste.
Le notion de D-groupoïde de Malgrange est moins contraignante. On en donnera la définition et l'on décrira la situation naturelle qu'elle permet de prendre en compte.

1.1 Les systèmes différentiels

Dans cette partie, on va considérer les systèmes différentiels dans le but de définir et de comprendre la notion de D-groupoïde de Malgrange. Aussi, on ne les abordera pas en toute généralité. On ne considérera que les systèmes différentiels dont les solutions sont des difféomorphismes locaux d'une variété.

On commencera par rappeler les structures de variétés analytiques complexes des espaces de base M que l'on considérera par la suite, par définir la notion de r-jet d'application analytique de M et par donner une description des espaces de r-jets de difféomorphismes locaux de M en tant que variétés analytiques complexes. Ceci permettra d'introduire des notations. En effet, les équations constituant les systèmes différentiels seront représentées par des fonctions régulières de ces espaces de r-jets.

Ensuite, afin de bien définir la notion de système différentiel, il faut considérer les différents espaces de r-jets au-dessus du même espace de base M^2, c'est-à-dire comme des variétés affines au-dessus de M^2. Ceci permet de considérer toutes les équations indépendamment de leur ordre et de les munir de dérivations naturelles ; c'est ce que l'on appellera une D-variété.
On définira les notions de solutions pour les systèmes différentiels et l'on énoncera les théorèmes d'intégrabilité des systèmes différentiels.

1.1.1 Préliminaires

La variété analytique complexe $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ et ses difféomorphismes locaux

Dans [**?**], [**?**] et [**?**], les espaces de base sur lesquels sont définis les D-variétés et les D-groupoïdes sont des variétés analytiques complexes lisses, séparées (et connexes). Malgrange considère une variété analytique complexe dans le sens général d'espace $\mathbb{C}$-analytique défini dans [**?**].

Cependant, les espaces de base considérés dans les chapitres suivants seront simplement $\mathbb{P}^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ ou éventuellement un ouvert de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Aussi, on renvoie à [**?**] pour la définition générale d'espace $\mathbb{C}$-analytique. On se limitera ici à préciser la structure de variété analytique complexe de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ sur laquelle seront définis les D-groupoïdes de Galois des systèmes aux q-différences de taille n. Ce sera aussi l'occasion de commencer à introduire des notations.

Définition 1.1.1. *Un espace annelé M en $\mathbb{C}$-algèbres est la donnée d'un espace topologique $|M|$ muni d'un faisceau structural $\mathcal{O}_M$ sur $|M|$ de $\mathbb{C}$-algèbres. On note $M = (|M|, \mathcal{O}_M)$.*
Un morphisme $u : M \to N$ d'espaces annelés en $\mathbb{C}$-algèbres est la donnée d'une application continue $u : |M| \to |N|$ et d'un morphisme $u^* : \mathcal{O}_N \to u_*\mathcal{O}_M$ de faisceaux sur $|N|$ de $\mathbb{C}$-algèbres. On a noté $u_*\mathcal{O}_M$ l'image directe du faisceau $\mathcal{O}_M$ par l'application u, c'est-à-dire le faisceau sur $|N|$ défini, pour V un ouvert de $|N|$, par $\Gamma(V, u_*\mathcal{O}_M) = \Gamma(u^{-1}(V), \mathcal{O}_M)$.
Soit U un ouvert de $|M|$. On note $|U|$ le sous-ensemble de $|M|$ muni de la topologie induite par celle de $|M|$. Le couple $(|U|, (\mathcal{O}_M)_{|U})$ est un espace annelé en $\mathbb{C}$-algèbres dit induit sur U par l'espace annelé M.

Exemple 1.1.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La structure de variété analytique complexe de $\mathbb{C}^n$ est la donnée de l'espace annelé en $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C}^n = (|\mathbb{C}^n|, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ où $|\mathbb{C}^n|$ désigne l'ensemble $\mathbb{C}^n$ muni de sa topologie usuelle de $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé et les sections du faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ sur un ouvert de $|\mathbb{C}^n|$ sont les fonctions holomorphes sur cet ouvert.

Exemple 1.1.3. On note $\mathbb{C}_0$ la partie de $P^1\mathbb{C}$ formée des points de coordonnées homogènes $(z : 1)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, et $\mathbb{C}_\infty$ la partie de $P^1\mathbb{C}$ formée des points de coordonnées homogènes $(1 : z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par identification avec $\mathbb{C}^{n+1}$, on munit les ensembles $\mathbb{C}_0\times\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}_\infty\times\mathbb{C}^n$ de la structure

de variété analytique complexe de $\mathbb{C}^{n+1}$ décrite dans l'exemple 1.1.2 précédent.
La structure de variété analytique complexe de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ est obtenue en recollant les espaces annelés $\mathbb{C}_0 \times \mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}^n$ sur l'ouvert $(\mathbb{C}_0 \cap \mathbb{C}_\infty) \times \mathbb{C}^n$ par l'isomorphisme d'espaces annelés

$$\begin{array}{rccc} u: & (\mathbb{C}_0 \cap \mathbb{C}_\infty) \times \mathbb{C}^n & \to & (\mathbb{C}_0 \cap \mathbb{C}_\infty) \times \mathbb{C}^n \\ & ((z:1), X_1, \ldots, X_n) & \mapsto & ((1:z^{-1}), X_1, \ldots, X_n) \end{array},$$

$$\begin{array}{rccc} u^*: & (\mathcal{O}_{\mathbb{C}_0\times\mathbb{C}^n})_{|(\mathbb{C}_0\cap\mathbb{C}_\infty)\times\mathbb{C}^n} & \to & u_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_\infty\times\mathbb{C}^n}\right)_{|(\mathbb{C}_0\cap\mathbb{C}_\infty)\times\mathbb{C}^n} \\ & f(z, X_1, \ldots, X_n) & \mapsto & f(z^{-1}, X_1, \ldots, X_n) \end{array}$$

Les ouverts de l'espace topologique sous-jacent $|\mathbb{P}^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n|$ sont donc les sous-ensembles de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ dont les intersections respectives avec $\mathbb{C}_0 \times \mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}^n$ sont respectivement des ouverts de $|\mathbb{C}_0\times\mathbb{C}^n|$ et de $|\mathbb{C}_\infty\times\mathbb{C}^n|$. Les sections du faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n}$ sur un ouvert U de $|\mathbb{P}^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n|$ sont donc les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ définies sur cet ouvert U dont les restrictions respectives aux ouverts $U \cap (\mathbb{C}_0 \times \mathbb{C}^n)$ et $U \cap (\mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}^n)$ sont respectivement des sections locales des faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_0\times\mathbb{C}^n}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_\infty\times\mathbb{C}^n}$, c'est-à-dire des fonctions holomorphes.

Notation 1.1.4. *On utilisera les notations*

$$y = (y_0, y_1, \ldots, y_n) = (z, X_1, \ldots, X_n) = (z, X)$$

pour représenter les coordonnées canoniques globales sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$. La coordonnée $y_0 = z$ représente les points de $\mathbb{C}_0$ et prend la valeur ∞ pour représenter le point $(1, 0) \in P^1\mathbb{C}$.
Ces quatre types de notations, à savoir y, $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$, $(z, X_1, \ldots, X_n)$ et (z, X), représentent un même système de coordonnées ; le choix du type de notations dépendra des besoins de synthèse ou de détail dans la rédaction.

Exemple 1.1.5. Soit U un ouvert de $|\mathbb{P}^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n|$. L'espace annelé induit sur U par $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n = (|\mathbb{P}^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n|, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n})$ définit une structure de variété analytique complexe sur U.

Remarque 1.1.6. Les variétés analytiques complexes $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ et celles définies par les ouverts de $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ sont lisses, séparées, connexes, et de dimension $n + 1$.

Notation 1.1.7. *Dans la suite de ce chapitre et dans les suivants, on désignera par n un entier naturel non nul. On désignera par $M = (|M|, \mathcal{O}_M)$ la variété analytique complexe $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, ou bien un ouvert de $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. L'espace topologique sous-jacent $|M|$ sera aussi noté M lorsqu'aucune confusion ne sera possible.*
On appellera carte locale de M la donnée d'un biholomorphisme entre un ouvert de $|M|$ et un ouvert de $|\mathbb{C}^{n+1}|$.

Définition 1.1.8. *On appellera difféomorphisme local de M une application $g : U \to V$ définie entre deux ouverts non vides U et V de M qui, lue dans des cartes locales de M, est un biholomorphisme entre ouverts de $\mathbb{C}^{n+1}$.*
Soit $g : U \to V$ un difféomorphisme local de M. Soit a un point de U. On appellera germe au point a du difféomorphisme local g, la classe d'équivalence de g parmi les difféomorphismes locaux de M définis sur un voisinage de a, pour la relation d'équivalence « coïncider sur un voisinage de a ».
On notera $Aut(M)$ l'ensemble de tous les germes de difféomorphismes locaux de M.

Exemple 1.1.9. Dans l'introduction de ce chapitre, on propose de préciser la structure de D-groupoïde de l'ensemble de tous les germes des difféomorphismes locaux de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ qui, exprimés à l'aide des coordonnées définies par la notation 1.1.4 ci-dessus, s'écrivent

$$(z, X) \mapsto (\alpha z, F(z, X)),$$

ou encore

$$(z, X_1, \ldots, X_n) \mapsto (\alpha z, F(z, X_1, \ldots, X_n)),$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $F = (F_1, \ldots, F_n)$ une application holomorphe définie sur un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ (nécessairement) telle que, pour tout point $(z, X) = (z, X_1, \ldots, X_n)$ de son ouvert de définition, on ait

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1}(z, X_1, \ldots, X_n) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n}(z, X_1, \ldots, X_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1}(z, X_1, \ldots, X_n) & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial X_n}(z, X_1, \ldots, X_n) \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}).$$

Les r-jets de difféomorphismes locaux de M

Pour définir la notion de r-jet d'application holomorphe de M, on reprendra les définitions de [?].

Définition 1.1.10. *Soient deux points $a, b \in M$. Soient $\varphi_a : (M, a) \to \mathbb{C}^{n+1}$ et $\varphi_b : (M, b) \to \mathbb{C}^{n+1}$ deux cartes locales de M. Soit $r \in \mathbb{N}$. On dit que deux applications holomorphes $f, g : (M, a) \to (M, b)$ telles que*[1] *$f(a) = g(a) = b$ ont un contact d'ordre $\geq r$ au point a si les applications $\varphi_b \circ f \circ \varphi_a^{-1}$ et $\varphi_b \circ g \circ \varphi_a^{-1}$ ont le même polynôme de Taylor d'ordre r en $\varphi_a(a)$.*

Proposition 1.1.11. *Soit $r \in \mathbb{N}$. « Avoir un contact d'ordre $\geq r$ au point a » est une notion indépendante des cartes choisies pour la définir et c'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications holomorphes définies sur un voisinage de a dans M et à valeurs dans M.*

Définition 1.1.12. *Pour une application holomorphe $f : (M, a) \to (M, b)$ telle que $f(a) = b$, le jet d'ordre r, ou r-jet, de f de source a et de but b est la classe d'équivalence de f pour la relation « avoir un contact d'ordre $\geq r$ au point a » ; on le notera $j_a^r(f)_b$, ou $j_a^r(f)$ car le but est toujours l'image de la source par l'application f, ou encore $j^r(f)$ lorsqu'il ne sera pas nécessaire de préciser la source du jet.*

Exemple 1.1.13. Soit $r \in \mathbb{N}$. Le r-jet d'un difféomorphisme local de M est le r-jet d'une application holomorphe $f : (M, a) \to M$ telle que la différentielle $Df(a)$ est inversible.

Notation 1.1.14. *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note $|J_r^*(M, M)|$ l'ensemble des r-jets de difféomorphismes locaux de M.*

Les variétés analytiques complexes de r-jets de difféomorphismes locaux de M

Dans cette partie, on va préciser la structure de variété analytique complexe des différents ensembles $|J_r^*(M, M)|$ de r-jets de difféomorphismes locaux de M, pour $r \in \mathbb{N}$, et l'on définira des systèmes de coordonnées sur ces variétés.

Proposition 1.1.15. *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'ensemble $|J_r^*(M, M)|$ des r-jets de difféomorphismes locaux de M est naturellement muni d'une structure de variété analytique complexe.*

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{N}$. Soient $\varphi_U : U \subset M \to \mathbb{C}^{n+1}$ et $\varphi_V : V \subset M \to \mathbb{C}^{n+1}$ deux cartes locales de M. On considère le sous-ensemble $\Upsilon_{U,V}^r$ de $|J_r^*(M, M)|$ formé des r-jets de difféomorphismes locaux de M de source un point de U et de but un point de V. On considère ensuite la bijection

$$\begin{array}{rccl} \varphi_{U,V}^r : & \Upsilon_{U,V}^r & \to & \varphi_U(U) \times \varphi_V(V) \times GL_{n+1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{(n+1)\times p_{n+1}(2)} \times \ldots \times \mathbb{C}^{(n+1)\times p_{n+1}(r)} \\ & j_a^r(f)_b & \mapsto & (\varphi_U(a), \varphi_V(b), \frac{\partial f}{\partial y}(a), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a), \ldots, \frac{\partial^r f}{\partial y^r}(a)) \end{array}$$

[1] Pour définir la notion de contact au point a entre deux applications holomorphes f et g définies sur un voisinage de a, il suffit de pouvoir « lire » f et g dans une même carte à l'arrivée, ce qui est une condition moins forte que de demander $f(a) = g(a)$. Cependant, la condition $f(a) = g(a)$ est nécessaire pour avoir un contact au point a.

où $p_{n+1}(l)$ est la dimension de l'espace des polynômes homogènes de degré l à $n+1$ variables et $\frac{\partial^l f}{\partial y^l}(a)$ représente le $p_{n+1}(l)$-uplet des dérivées partielles d'ordre l des composantes du difféomorphisme local $\varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1}$ au point $\varphi_U(a)$.
Les ensembles $\varphi^r_{U,V}(\Upsilon^r_{U,V})$ sont naturellement munis d'une structure de variété analytique complexe, en tant qu'ouverts d'une variété analytique complexe $\mathbb{C}^N$, pour un certain entier $N \in \mathbb{N}^*$. On transporte cette structure sur $\Upsilon^r_{U,V}$ par la bijection $\varphi^r_{U,V}$.
Fixons un recouvrement $\mathcal{U}$ de M par des cartes locales de M. Alors, l'union des sous-ensembles de $|J^*_r(M,M)|$ de la forme $\Upsilon^r_{U,V}$, pour U et V deux ouverts de $\mathcal{U}$, recouvre $|J^*_r(M,M)|$. De plus, pour deux couples (U,V) et (U',V') d'ouverts de $\mathcal{U}$ tels que $\Upsilon^r_{U,V} \cap \Upsilon^r_{U',V'} \neq \emptyset$, la bijection $(\varphi^r_{U,V})^{-1} \circ \varphi^r_{U',V'}$ est un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{C}^N$. Cela permet de recoller les variétés analytiques complexes $\Upsilon^r_{U,V}$ (par les morphismes identité) et d'obtenir une structure de variété analytique complexe pour $|J^*_r(M,M)|$.
Les ouverts de l'espace topologique sous-jacent $|J^*_r(M,M)|$ sont les sous-ensembles Υ de $|J^*_r(M,M)|$ tels que pour tout couple (U,V) d'ouverts de $\mathcal{U}$, l'ensemble $\Upsilon \cap \Upsilon^r_{U,V}$ est un ouvert de l'espace topologique $\Upsilon^r_{U,V}$.
Les sections du faisceau structural sur $|J^*_r(M,M)|$, que l'on note momentanément $\mathcal{O}_{|J^*_r(M,M)|}$, sur un ouvert Υ de $|J^*_r(M,M)|$ sont les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ définies sur cet ouvert Υ, et dont les restrictions à tout ouvert $\Upsilon \cap \Upsilon^r_{U,V}$ sont des sections locales de la variété analytique complexe $\Upsilon^r_{U,V}$. □

Notation 1.1.16. *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note $|J^*_r(M,M)|$ l'ensemble, ou l'espace topologique, selon le contexte, des r-jets de difféomorphismes locaux de M. La structure d'espace topologique est celle définie dans la preuve de la proposition* 1.1.15 *ci-dessus.*
On oubliera la notation du faisceau des fonctions régulières de la variété analytique complexe $|J^*_r(M,M)|$ définie dans la preuve de la proposition 1.1.15 *ci-dessus, ce faisceau n'étant pas considéré par la suite.*

Notation 1.1.17. *On utilisera un système de coordonnées globales sur $|J^*_r(M,M)|$ pour représenter la source, le but et les dérivés partielles d'ordre $\leq r$ des r-jets évaluées en le point source.*
Comme pour la notation 1.1.4*, on utilisera quatre types de notations différents pour le même système de coordonnées. Le choix du type de notations dépendra des besoins de synthèse ou de détail dans la rédaction.*
Les notations sont les suivantes :
- la source :

$$y = (y_0, y_1, \ldots, y_n) = (z, X_1, \ldots, X_n) = (z, X),$$

- le but :

$$\bar{y} = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) = (\bar{z}, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n) = (\bar{z}, \bar{X}),$$

- les dérivées partielles d'ordre 1 *des r-jets évaluées en le point source :*

$$\partial \bar{y} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \left(\frac{\partial \bar{y}_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=0,\ldots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_n} \\ \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial z} & \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \frac{\partial \bar{X}_i}{\partial X_j} & \vdots \\ \frac{\partial \bar{X}_n}{\partial z} & \frac{\partial \bar{X}_n}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{X}_n}{\partial X_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X} \\ \frac{\partial \bar{X}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} \end{pmatrix},$$

- les dérivées partielles d'ordre 2 *à r des r-jets évaluées en le point source :*

$$\partial^2 \bar{y} = \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 \bar{y}_i}{\partial y_0^{\alpha_0} \partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}}; i = 0, \ldots, n, \alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}, |\alpha| = 2\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^{\alpha_0} \partial X_1^{\alpha_1} \ldots \partial X_n^{\alpha_n}}, \frac{\partial^2 \bar{X}_i}{\partial z^{\alpha_0} \partial X_1^{\alpha_1} \ldots \partial X_n^{\alpha_n}}; i = 1, \ldots, n, \alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}, |\alpha| = 2\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z \partial X}, \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial X^2}, \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial z \partial X}, \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial X^2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\partial^r \bar{y} = \frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r} = \left(\frac{\partial^r \bar{y}_i}{\partial y_0^{\alpha_0} \partial y_1^{\alpha_1} \dots \partial y_n^{\alpha_n}}; i = 0, \dots, n, \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}, |\alpha| = r\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^r \bar{z}}{\partial z^{\alpha_0} \partial X_1^{\alpha_1} \dots \partial X_n^{\alpha_n}}, \frac{\partial^r \bar{X}_i}{\partial z^{\alpha_0} \partial X_1^{\alpha_1} \dots \partial X_n^{\alpha_n}}; i = 1, \dots, n, \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}, |\alpha| = r\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^r \bar{z}}{\partial z^{\alpha_0} \partial X^{\alpha'}}, \frac{\partial^r \bar{X}}{\partial z^{\alpha_0} \partial X^{\alpha'}}; \alpha = (\alpha_0, \alpha') \in \mathbb{N}^{n+1}, |\alpha| = r\right)$$

On notera aussi $\delta = \det(\frac{\partial \bar{y}}{\partial y})$ *le jacobien d'un* r*-jet évalué en le point source.*

Exemple 1.1.18. Les coordonnées du r-jet $j_a^r(id)$ sont

$$(y, \bar{y}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r}) = (y_a, y_a, Id_{n+1}, 0, \dots, 0)$$

où y_a représente les coordonnées du point $a \in M$.
Les coordonnées du r-jet $j_a^r\,[(z, X) \mapsto (\alpha z, AX)]$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $A \in GL_n(\mathbb{C})$, sont

$$(z, X, \bar{z}, \bar{X}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X} \\ \frac{\partial \bar{X}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} \end{pmatrix}, \dots) = (z_a, X_a, \alpha z_a, AX_a, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, 0, \dots, 0)$$

où (z_a, X_a) représente les coordonnées du point $a \in M$.

Les variétés complexes « mixtes » de r-jets de difféomorphismes locaux de M

Soit $r \in \mathbb{N}$. Les changements de cartes considérés dans la preuve de la proposition 1.1.15 précédente fixent la source et le but des r-jets, et les composantes des changements de cartes représentant les dérivées partielles des r-jets dépendent holomorphiquement de la source et du but des r-jets et polynomialement des dérivées partielles et de l'inverse du jacobien des r-jets.

Cette précision permet de restreindre la définition de fonction régulière sur $|J_r^*(M, M)|$ en ne considérant, parmi les fonctions holomorphes sur $|J_r^*(M, M)|$, que les fonctions qui, exprimées à l'aide des coordonnées définies par la notation 1.1.17, dépendent holomorphiquement des coordonnées source et but, et polynomialement des coordonnées qui représentent les dérivées partielles et l'inverse du jacobien des r-jets.
Ces fonctions ont une structure de faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres sur $|J_r^*(M, M)|$.

Définition 1.1.19. *Soit* $r \in \mathbb{N}$. *On note* $\mathcal{O}'_{J_r^*(M,M)}$ *le faisceau sur* $|J_r^*(M, M)|$ *dont les sections sont les fonctions à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *définies sur un ouvert de* $|J_r^*(M, M)|$ *qui, exprimées à l'aide des coordonnées définies par la notation* 1.1.17 *ci-dessus, dépendent holomorphiquement des coordonnées* y *et* $\bar{y}$*, et polynomialement (ce qui est plus contraignant) des coordonnées* $\partial \bar{y}$, δ^{-1}, $\partial^2 \bar{y}$, ... ,$\partial^r \bar{y}$.
L'espace annelé $J_r^*(M, M)' = (|J_r^*(M, M)|, \mathcal{O}'_{J_r^*(M,M)})$ *donne à* $|J_r^*(M, M)|$ *une structure de variété complexe que l'on qualifiera de « mixte ».*

Définition 1.1.20. *Pour tous les entiers* $r, l \in \mathbb{N}$, *on note* $|\pi|_r^{r+l} : |J_{r+l}^*(M, M)| \to |J_r^*(M, M)|$ *la projection qui, exprimée à l'aide des coordonnées définies par la notation* 1.1.17, *consiste à oublier les coordonnées* $\frac{\partial^{r+1} \bar{y}}{\partial y^{r+1}}, \dots, \frac{\partial^{r+l} \bar{y}}{\partial y^{r+l}}$ *qui représentent les dérivées partielles d'ordre* $> r$.
Ces projections induisent naturellement des morphismes entre les espaces annelés $J_r^*(M, M)'$ *correspondants.*

Notation 1.1.21. *Par la suite, on considérera les notations* 1.1.17 *à la fois comme des coordonnées sur les espaces de r-jets $|J_r^*(M,M)|$, et comme des sections locales des faisceaux $\mathcal{O}'_{J_r^*(M,M)}$.*

Exemple 1.1.22. Soit $r \geq 1$. Les évaluations des sections $\frac{\partial \bar{z}}{\partial X}$, c'est-à-dire des sections $\frac{\partial \bar{z}}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_n}$ en un r-jet $j_a^r\left[(z,X) \mapsto (\alpha z, F(z,X)\right]$ donnent 0.
Les évaluations des sections $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} z - \bar{z}$ et $\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2}$ en ce même r-jet donnent également 0.

Les sections locales du faisceau $\mathcal{O}'_{J_r^*(M,M)}$ sont des fonctions qui, exprimées en coordonnées, sont de la forme

$$E(y, \bar{y}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \delta^{-1}, \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r})$$

et dépendent holomorphiquement des coordonnées y et $\bar{y}$ et polynomialement des coordonnées $\partial \bar{y}, \delta^{-1}, \partial^2 \bar{y}, \ldots, \partial^r \bar{y}$. Dans la suite, on appellera ces fonctions « équations » ou « équations aux dérivées partielles ».

1.1.2 Les systèmes différentiels

A priori, un système différentiel est la donnée d'un ensemble fini d'équations aux dérivées partielles. Cependant, afin de bien définir cette notion, il faut pouvoir considérer toutes les équations qu'il engendre, du point de vue de l'algèbre différentielle, c'est-à-dire les combinaison algébriques des équations données et de leurs dérivées.
Il faut donc pouvoir considérer toutes les équations, indépendamment de leur ordre r, comme les sections d'un même faisceau, et les munir des dérivations naturelles. Ceci est l'objet du formalisme introduit dans cette partie.

Les variétés affines de r-jets de difféomorphismes locaux de M

La notion de variété affine au-dessus de M^2 va permettre de considérer tous les espaces de r-jets au-dessus du même espace de base M^2 et donc ensuite, de considérer les équations comme les sections d'un même faisceau.

Les définitions relatives aux variétés affines au-dessus d'une variété analytique complexe sont par exemple exposées dans [**?**], Chap. IV, et sont spécialisées ici aux exemples que l'on a en vue.

Soit $r \in \mathbb{N}$. Le faisceau structural $\mathcal{O}'_{J_r^*(M,M)}$ de la définition 1.1.19 est un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres sur l'espace topologique $|J_r^*(M,M)|$.
L'espace topologique $|J_0^*(M,M)|$ s'identifie à M^2. Aussi, par image directe, la projection $|\pi|_0^r$: $|J_r^*(M,M)| \to |M^2|$ permet de considérer la faisceau $\mathcal{O}'_{J_r^*(M,M)}$ comme un faisceau sur M^2. On pose

$$\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} = (|\pi|_0^r)_* \, \mathcal{O}'_{J_r^*(M,M)}$$

Par exemple, pour deux ouverts U et V de M, et avec la notation 1.1.17, la restriction du faisceau $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ à l'ouvert $U \times V$ est :

$$\left(\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}\right)_{|(U\times V)} = (\mathcal{O}_{M^2})_{|(U\times V)} \left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \delta^{-1}, \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r}\right]$$

Les sections du faisceau $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ seront encore appelées « équations » ou « équations aux dérivées partielles ». En effet, ce sont les mêmes fonctions que les sections du faisceau $\mathcal{O}'_{J_r^*(M,M)}$, mais elles sont ici munies d'une autre structure de faisceau.

Définition 1.1.23. *Soit $r \in \mathbb{N}$. La structure de variété affine au-dessus de M^2 de l'ensemble des r-jets de difféomorphismes locaux de M est la donnée de l'espace annelé $J_r^*(M,M) = (|M^2|, \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)})$.*

Remarque 1.1.24. Le faisceau $\mathcal{O}_{J_0^*(M,M)}$ coïncide avec le faisceau $\mathcal{O}_{M^2}$ donc la variété affine $J_0^*(M,M)$ des 0-jets de difféomorphismes locaux de M s'identifie naturellement à la variété analytique complexe M^2.

Notation 1.1.25. *Pour tous les entiers $r, l \in \mathbb{N}$, on notera $\pi_r^{r+l} : J_{r+l}^*(M,M) \to J_r^*(M,M)$ le morphisme dominant de variétés affines au-dessus de M^2 défini par le morphisme naturel d'inclusion $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} \to \mathcal{O}_{J_{r+l}^*(M,M)}$.*

Définition 1.1.26. *On dira, selon [?], Chap. IV, qu'un faisceau $\mathcal{I}_r$ d'idéaux de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ est cohérent s'il est localement de type fini, c'est-à-dire si pour tout point $\omega \in M^2$ il existe un voisinage ouvert Ω de ω dans M^2 et une suite exacte de faisceaux de $(\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)})_{|\Omega}$-modules de la forme*

$$(\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)})_{|\Omega}^l \to (\mathcal{I}_r)_{|\Omega} \to 0$$

avec $l \in \mathbb{N}^*$.
On dira plus simplement idéal pour faisceau d'idéaux et idéal cohérent pour faisceau cohérent d'idéaux.

D'après [?], p.79, pour tout $r \in \mathbb{N}$, la $\mathcal{O}_{M^2}$-algèbre $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ est cohérente au sens usuel, c'est-à-dire que tout idéal $\mathcal{I}_r$ de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ localement de type fini est localement de présentation finie, ce qui signifie que pour tout point $\omega \in M^2$ il existe un voisinage ouvert Ω de ω dans M^2 et une suite exacte de faisceaux de $(\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)})_{|\Omega}$-modules de la forme

$$(\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)})_{|\Omega}^k \to (\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)})_{|\Omega}^l \to (\mathcal{I}_r)|\Omega \to 0$$

avec $k, l \in \mathbb{N}^*$. Aussi, la définition 1.1.26 précédente coïncide avec la notion usuelle plus générale de cohérence.

Définition 1.1.27. *On dira, selon [?], 2., qu'un idéal $\mathcal{I}_r$ de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ est réduit si pour tout ouvert Ω de M^2, et pour toute équation $E \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)})$ telle que $E^k \in \Gamma(\Omega, \mathcal{I}_r)$, pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a $E \in \Gamma(\Omega, \mathcal{I}_r)$.*

Définition 1.1.28. *Un idéal cohérent $\mathcal{I}_r$ de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ définit une sous-variété fermée de la variété affine $J_r^*(M,M)$ par la donnée de l'espace annelé $(|M^2|, \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}/\mathcal{I}_r)$. On notera traditionnellement $\mathcal{O}_{Y_r} = \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}/\mathcal{I}_r$ et $Y_r = (|M^2|, \mathcal{O}_{Y_r})$.*
Un idéal cohérent $\mathcal{I}_r$ de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ sera aussi appelé système différentiel d'ordre fini sur M, ou système différentiel sur M, ou encore système différentiel d'ordre r.

Proposition 1.1.29 ([?], p.83)**.** *La racine d'un idéal cohérent de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ est un idéal cohérent de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$.*

Remarque 1.1.30. Un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_r$ de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ s'interprète aussi comme un faiceau d'idéaux de $\mathcal{O}'_{J_r^*(M,M)}$. On notera traditionnellement $|Y_r|$ le lieu d'annulation dans $|J_r^*(M,M)|$ des sections du faisceau $\mathcal{I}_r$, éventuellement muni de sa topologie induite. On notera $\mathcal{O}'_{Y_r}$ le quotient $\mathcal{O}'_{J_r^*(M,M)}/\mathcal{I}_r$. L'espace annelé $Y'_r = (|Y_r|, \mathcal{O}'_{Y_r})$ définit donc une sous-variété fermée de la variété complexe « mixte » $J_r^*(M,M)'$.
On remarque que la variété analytique complexe Y'_0 et la variété affine Y_0 sont définies par le même espace annelé. On identifiera donc Y'_0 et Y_0.
L'interprétation géométrique des variétés affines $J_r^*(M,M)$ et Y_r en tant que variétés complexes mixtes $J_r^*(M,M)'$ et Y'_r est ici artisanale. Le formalisme correct utilisant le foncteur « spectre analytique » est par exemple présenté dans [?].

Exemple 1.1.31 (que l'on suit tout du long de ce chapitre)**.**
On considère l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}$ défini en coordonnées par

$$\mathcal{Q}_2 = \left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial X}, z\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - \bar{z}, \partial^2 \bar{z} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial X}, z\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - \bar{z}, \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z \partial X}, \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial X^2}, \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2} \right\rangle$$

Il définit une sous-variété fermée de la variété affine $J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)$ au-dessus de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$. Le lieu d'annulation $|Q_2|$ de l'idéal $\mathcal{Q}_2$ dans $|J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)|$ est l'ensemble des 2-jets de difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ de coordonnées

$$(z, X, \bar{z}, \bar{X}, \begin{pmatrix} \frac{\partial\bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial\bar{z}}{\partial X} \\ \frac{\partial\bar{X}}{\partial z} & \frac{\partial\bar{X}}{\partial X} \end{pmatrix}, \partial^2\bar{z}, \partial^2\bar{X}) = (\zeta, \chi, \alpha\zeta, \star, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \star & \star \end{pmatrix}, 0, \star)$$

avec $\zeta\in\mathbb{C}$, $\chi\in\mathbb{C}^n$, $\alpha\in\mathbb{C}^*$, et les $\star$ représentent respectivement des points de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n$, $GL_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^{n\times p_{n+1}(2)}$.

L'ensemble $|Q_2|$ est donc exactement l'ensemble de tous les 2-jets des difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ de la forme $(z, X)\mapsto(\alpha z, F(z, X))$ décrits dans l'exemple 1.1.9.

Notation 1.1.32.
- On notera $\mathcal{O}_{J^*(M,M)} = \varinjlim \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ la limite inductive du système inductif de faisceaux sur M^2 donné par les faisceaux $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$, pour $r\in\mathbb{N}^*$, et les morphismes naturels d'inclusion $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}\to\mathcal{O}_{J_{r+l}^*(M,M)}$. C'est un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres sur M^2.
- On notera $|J^*(M,M)|$ la limite projective du système projectif d'ensembles donné par les ensembles $|J_r^*(M,M)|$, pour $r\in\mathbb{N}^*$, et les projections $|\pi|_r^{r+l}$. L'ensemble $|J^*(M,M)|$ coïncide avec l'ensemble des germes de difféomorphismes locaux formels de M, c'est-à-dire, en coordonnées, les éléments $g\in\mathbb{C}[[y-y_a]]^{n+1}$, avec $a\in M$, y_a ses coordonnées et $\frac{\partial\bar{y}}{\partial y}(y_a)\in GL_n(\mathbb{C})$.

La D-variété $(M, J^*(M,M), D)$ des jets de difféomorphismes locaux de M

La notion de D-variété permet de bien définir un système différentiel dans le sens où l'idéal d'équations qui le définit est stable par les opérations de l'algèbre différentielle.

Les définitions relatives aux D-variétés au-dessus d'une variété analytique complexe lisse sont par exemple exposées dans [**?**], 3., et sont spécialisées ici aux exemples que l'on a en vue.

Définition 1.1.33. *La D-variété des jets de difféomorphismes locaux de M est la donnée de :*
(i) la variété analytique complexe lisse M,
(ii) la variété analytique complexe M^2 et la projection source (première projection) $s: M^2\to M$,
(iii) la limite projective du système projectif $\{J_r^*(M,M), \pi_r^{r+l}\}_{r\in\mathbb{N}^*}$ de variétés affines au-dessus de M^2,
(iv) la dérivation naturelle sur $\mathcal{O}_{J^*(M,M)} = \varinjlim \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ définie, à l'aide des coordonnées, par $D.E = \sum_{i=0}^n dy_i\otimes D_{y_i}.E$ avec

$$D_{y_i}.E = \frac{\partial E}{\partial y_i} + \sum_{j=0}^n \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{\partial E}{\partial\left(\frac{\partial^{|\alpha|}\bar{y}_j}{\partial y^\alpha}\right)} \frac{\partial^{|\alpha|+1}\bar{y}_j}{\partial y_i\partial y^\alpha}$$

La D-variété des jets de difféomorphismes locaux de M sera notée $(M, J^*(M,M), D)$.

Les notations pouvant présenter une ambiguïté, on précise que dans la définition de $D_{y_i}.E$ ci-dessus, les symboles $\frac{\partial^{|\alpha|}\bar{y}_j}{\partial y^\alpha}$ et $\frac{\partial^{|\alpha|+1}\bar{y}_j}{\partial y_i\partial y^\alpha}$ représentent des coordonnées des espaces de r-jets (notations 1.1.17) et les symboles $\frac{\partial E}{\partial y_i}$ et $\frac{\partial E}{\partial\ \frac{\partial^{|\alpha|}\bar{y}_j}{\partial y^\alpha}}$ représentent des dérivées partielles de la fonction E.

Définition 1.1.34. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}$ qui est pseudo-cohérent, c'est-à-dire tel que les idéaux $\mathcal{I}_r = \mathcal{I}\cap\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ sont cohérents, et différentiel, c'est-à-dire stable par les dérivations partielles D_{y_i}. Pour tout $r\in\mathbb{N}$, on note $|Y_0|$ le lieu d'annulation de l'idéal $\mathcal{I}_0$ dans $|M^2|$ et $Y_r = (|Y_0|, \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}/\mathcal{I}_r)$.*
L'idéal $\mathcal{I}$ définit une D-sous-variété fermée de $(M, J^*(M,M), D)$ par la donnée de :
(i) la variété analytique complexe M,

(ii) la sous-variété analytique complexe fermée $Y_0 = (|Y_0|, \mathcal{O}_{M^2}/\mathcal{I}_0)$ de M^2 et la restriction de la projection source s à Y_0,
(iii) la limite projective du système projectif $\left\{Y_r, \pi_r^{r+l}\right\}_{r\in\mathbb{N}^*}$ de variétés affines au-dessus de Y_0 données par les faisceaux $\mathcal{O}_{Y_r} = \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}/\mathcal{I}_r$,
(iv) la dérivation induite sur $\mathcal{O}_Y = \varinjlim \mathcal{O}_{Y_r}$ par celle de $J^*(M,M)$; elle est bien définie car l'idéal $\mathcal{I}$ est différentiel.
On qualifiera un idéal pseudo-cohérent et différentiel $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}$ de réduit si les idéaux $\mathcal{I}_r := \mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ sont réduits.

Proposition 1.1.35. *La racine d'un idéal pseudo-cohérent et différentiel de $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}$ est encore un idéal pseudo-cohérent et différentiel de $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}$.*

Démonstration. Ce résultat est un lemme classique de Ritt. □

Définition 1.1.36. *Selon la définition usuelle utilisée dans [**?**] (qui diffère de celle de [**?**]), on appellera idéal différentiel engendré par un idéal cohérent $\mathcal{I}_r$ de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$, l'idéal (pseudo-cohérent et différentiel) $\mathcal{I}' = \cup_{l\geq 0} pr_l\mathcal{I}_r$. Le prolongement $pr_l\mathcal{I}_r$ d'ordre l de $\mathcal{I}_r$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{J_{r+l}^*(M,M)}$ engendré par les $D_{y_0}^{\alpha_0}\dots D_{y_n}^{\alpha_n}\mathcal{I}_r$, avec $(\alpha_0,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ et $|\alpha| \leq l$.*
On appellera idéal différentiel réduit engendré par un idéal cohérent $\mathcal{I}_r$ de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$, la racine de l'idéal différentiel engendré par l'idéal $\mathcal{I}_r$. On le notera $\sqrt{\mathcal{I}'}$.

Exemple 1.1.37. Pour calculer le prolongement d'ordre 1 de l'idéal $\mathcal{Q}_2$ défini dans l'exemple 1.1.31, on calcule les dérivées partielles des générateurs de $\mathcal{Q}_2$. On a par exemple :

$$\begin{array}{l} D_z(z\frac{\partial\bar z}{\partial z} - \bar z) = \frac{\partial\bar z}{\partial z} + z\frac{\partial^2\bar z}{\partial z^2} - \frac{\partial\bar z}{\partial z} = z\frac{\partial^2\bar z}{\partial z^2} \in \mathcal{Q}_2 \\ D_{X_i}(z\frac{\partial\bar z}{\partial z} - \bar z) = z\frac{\partial^2\bar z}{\partial z\partial X_i} - \frac{\partial\bar z}{\partial X_i} \in \mathcal{Q}_2 \\ D_z(\frac{\partial^2\bar z}{\partial z\partial X}) = \frac{\partial^3\bar z}{\partial z^2\partial X} \notin \mathcal{Q}_2 \end{array}$$

On obtient que

$$pr_1\mathcal{Q}_2 = \left\langle \mathcal{Q}_2, \partial^3\bar z\right\rangle \subset \mathcal{O}_{J_3^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}$$

puis que, pour $l \geq 2$,

$$pr_l\mathcal{Q}_2 = \left\langle \mathcal{Q}_2, \partial^3\bar z, \partial^4\bar z, \dots, \partial^{2+l}\bar z\right\rangle \subset \mathcal{O}_{J_{2+l}^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}$$

et enfin que l'idéal différentiel engendré par $\mathcal{Q}_2$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{J^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}$:

$$\mathcal{Q}' = \bigcup_{l\geq 0} pr_l\mathcal{Q}_2 = \left\langle \mathcal{Q}_2, \partial^{2+l}\bar z; l\geq 0\right\rangle = \left\langle \frac{\partial\bar z}{\partial X}, z\frac{\partial\bar z}{\partial z} - \bar z, \partial^{2+l}\bar z; l\geq 0\right\rangle$$

Les solutions

On introduit ici la notion de solution pour un idéal d'équations. C'est une notion locale : les solutions sont des germes de difféomorphismes locaux de M. Les définitions proposées ci-dessous sont essentiellement reprises de [**?**], Chap. II et Chap. IV.

On définira cette notion à la fois pour les idéaux cohérents de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ et pour les idéaux pseudo-cohérents et différentiels de $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}$. Aussi :

- on considère d'une part un idéal cohérent $\mathcal{I}_r \subset \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ qui définit une sous-variété fermée Y_r de $J_r^*(M,M)$. On note $|Y_r|$ le lieu d'annulation dans $|J_r^*(M,M)|$ de l'idéal $\mathcal{I}_r$. On note $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_r \cap \mathcal{O}_{J_0^*(M,M)}$ et Y_0 le lieu d'annulation dans M^2 de l'idéal $\mathcal{I}_0$.

- on considère d'autre part un idéal pseudo-cohérent et différentiel $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{J^*(M,M)}$ qui définit une D-sous-variété fermée Y de $J^*(M,M)$. On note encore (et volontairement) $\mathcal{I}_r = \mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$, $|Y_r|$ le lieu d'annulation dans $|J_r^*(M,M)|$ de l'idéal $\mathcal{I}_r$, $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{J_0^*(M,M)}$ et Y_0 le lieu d'annulation dans M^2 de l'idéal $\mathcal{I}_0$.

Définition 1.1.38. *Soit (a,b) un point de Y_0. Un germe en (a,b) de solution dite analytique, selon [?], ou convergente, selon [?], de $\mathcal{I}_r$ (resp. $\mathcal{I}$) est la donnée d'un difféomorphisme local $g:(M,a)\to(M,b)$ de M tel que pour toute équation E de la fibre $(\mathcal{I}_r)_{(a,b)}$ (resp. de la fibre $\mathcal{I}_{(a,b)}$), la fonction définie en coordonnées par*

$$E.g : y \mapsto E(y, g(y), \frac{\partial g}{\partial y}(y), \det(\frac{\partial g}{\partial y}(y))^{-1}, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(y), \ldots, \frac{\partial^r g}{\partial y^r}(y))$$

est nulle sur un voisinage de a dans M.
L'ensemble des solutions convergentes de $\mathcal{I}_r$ (resp. $\mathcal{I}$) sera noté $sol(\mathcal{I}_r)$ (resp. $sol(\mathcal{I})$).

Remarque 1.1.39.
Pour toute équation E de la fibre $\mathcal{I}_{(a,b)}$, et tout difféomorphisme local $g:(M,a)\to(M,b)$, on a, en coordonnées, $(D_i.E).g = \frac{\partial}{\partial y_i}(E.g)$. Ceci justifie la définition 1.1.33 des dérivations D_i et assure que l'idéal $\mathcal{I}_r$ et l'idéal différentiel engendré par $\mathcal{I}_r$ ont même ensemble de solutions convergentes.

Exemple 1.1.40.
- L'ensemble des solutions convergentes de l'idéal nul (0) de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ (resp. de $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}$) est $sol(0) = Aut(M)$, l'ensemble des germes de difféomorphismes locaux de M.

- L'ensemble des solutions de l'idéal $\mathcal{Q}_2$ défini dans l'exemple 1.1.31 est l'ensemble de tous les germes des difféomorphismes locaux de M de la forme $(z,X)\mapsto(\alpha z, F(z,X))$.
En effet, soit

$$g : (z,X) \mapsto (G_1(z,X), G_2(z,X))$$

une solution convergente de $\mathcal{Q}_2$.
La définition de solution assure que

$$0 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial X}.g = [(z,X) \mapsto \frac{\partial G_1}{\partial X}(z,X)]$$

donc G_1 est une fonction qui ne dépend que de z, pas de X.
Ensuite,

$$0 = \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2}.g = [(z,X) \mapsto \frac{\partial^2 G_1}{\partial z^2}(z)]$$

donc la fonction G_1 est une fonction affine de la forme $z\mapsto \alpha z+\beta$ avec $\alpha\in\mathbb{C}^*$ et $\beta\in\mathbb{C}$.
Enfin,

$$0 = (z\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - \bar{z}).g = [(z,X) \mapsto z\alpha - (\alpha z + \beta)]$$

donc $\beta = 0$ et

$$G_1(z,X) = \alpha z$$

Les équations de $\mathcal{Q}_2$ ne donnent aucune condition sur la fonction G_2.

- L'idéal différentiel $\mathcal{Q}'$ engendré par $\mathcal{Q}_2$ décrit dans l'exemple 1.1.37 a le même ensemble de solutions convergentes que l'idéal $\mathcal{Q}_2$, à savoir l'ensemble de tous les germes des difféomorphismes locaux de M de la forme $(z,X)\mapsto(\alpha z, F(z,X))$. En effet, les générateurs $\partial^{2+l}\bar{z}$, pour $l\geq 1$, de $\mathcal{Q}'$ sont obtenus par dérivation(s) des générateurs $\partial^2\bar{z}$ de $\mathcal{Q}_2$. Aussi, d'après la remarque 1.1.39 précédente, ils ne donnent pas de nouvelle condition sur les solutions.

Remarque 1.1.41. Dans [?] et [?], les deux définitions (équivalentes) de solution convergente pour l'idéal différentiel $\mathcal{I}$, toutes deux équivalentes à la définition 1.1.38 donnée ci-dessus, sont les suivantes :
- Soit (a,b) un point de Y_0. Un germe en (a,b) de solution convergente de $\mathcal{I}$ est un germe en a

de section holomorphe $\bar{\sigma}$ de la projection $|Y| \to |M|$, c'est-à-dire une collection de germes en a de sections $\bar{\sigma}^r$ des projections $|Y^r| \to |M|$, définies sur un voisinage fixe de a, avec $\bar{\sigma}^0(a) = (a, b)$ et qui soit tangente aux champs de vecteurs D_i.
L'équivalence de cette définition avec celle que l'on donne en 1.1.38 s'obtient en posant, en coordonnées, $\bar{\sigma}^r(y) = (y, g(y), \frac{\partial g}{\partial y}(y), \ldots, \frac{\partial^l g}{\partial y^l}(y))$, ce qui est bien défini, et donc en particulier $\bar{\sigma}^0(y) = (y, g(y))$.
- Soit (a, b) un point de Y_0. Un germe en (a, b) de solution convergente de $\mathcal{I}$ est la donnée d'un morphisme $u : \mathcal{O}_{Y,(a,b)} \to \mathcal{O}_{M,a}$ de $\mathbb{C}$-algèbres qui est l'identité sur $\mathcal{O}_{M,a} \hookrightarrow \mathcal{O}_{Y,(a,b)}$ et tel que, en coordonnées, $uD_i = \frac{\partial}{\partial y_i} u$, avec $\frac{\partial}{\partial y_i}$ la dérivée partielle usuelle sur M par rapport à la coordonnée y_i.
L'équivalence de cette définition avec celle que l'on donne en 1.1.38 s'obtient en posant $u(E) = E.g = [y \mapsto E(y, g(y), \frac{\partial g}{\partial y}(y), \ldots)]$, ce qui est bien défini, et donc en particulier, en coordonnées, $u(\bar{y}_i) = g_i$.

Définition 1.1.42. *Soit (a, b) un point de Y_0. Un germe en (a, b) de solution formelle de $\mathcal{I}_r$ (resp. $\mathcal{I}$) est, en coordonnées, la donnée d'un élément $g \in \mathbb{C}[[y-a]]^{n+1}$, avec $y - a = (y_0 - a_0, \ldots, y_n - a_n)$, tel que pour toute équation E de la fibre $(\mathcal{I}_r)_{(a,b)}$ (resp. de la fibre $\mathcal{I}_{(a,b)}$), l'élément*

$$E(y, g(y), \frac{\partial g}{\partial y}(y), \det(\frac{\partial g}{\partial y}(y))^{-1}, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(y), \ldots, \frac{\partial^r g}{\partial y^r}(y))$$

de $\mathbb{C}[[y - a]]$ est nul.
L'ensemble des solutions formelles de $\mathcal{I}_r$ (resp. de $\mathcal{I}$) sera noté $\widehat{sol}(\mathcal{I}_r)$ (resp. $\widehat{sol}(\mathcal{I})$).

Remarque 1.1.43. Pour toute équation E de la fibre $\mathcal{I}_{(a,b)}$, et tout élément $g \in \mathbb{C}[[y - a]]^{n+1}$ tel que $g(a) = b$, on a, $(D_i.E).g = \frac{\partial}{\partial y_i}(E.g)$. Ceci justifie encore la définition 1.1.33 des dérivations D_i et assure que l'idéal $\mathcal{I}_r$ et l'idéal différentiel engendré par $\mathcal{I}_r$ ont même ensemble de solutions formelles.

Exemple 1.1.44.
- Les solutions convergentes de $\mathcal{I}_r$ (resp. $\mathcal{I}$) sont des solutions formelles de $\mathcal{I}_r$ (resp. $\mathcal{I}$).
- L'ensemble des solutions formelles de l'idéal nul (0) de $\mathcal{I}_r$ (resp. $\mathcal{I}$) est $\widehat{sol}(0) = |J^*(M, M)|$, la limite projective des ensembles $|J_r^*(M, M)|$ de r-jets de difféomorphismes locaux de M.
- L'ensemble des solutions formelles $\widehat{sol}(\mathcal{Q}_2)$ de l'idéal $\mathcal{Q}_2$ est l'ensemble de tous les jets des difféomorphismes locaux formels de M de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \hat{F}(z, X))$.
- D'après la remarque 1.1.43, l'idéal différentiel $\mathcal{Q}'$ a le même ensemble de solutions formelles $\widehat{sol}(\mathcal{Q}')$ que l'idéal $\mathcal{Q}_2$: c'est l'ensemble de tous les jets des difféomorphismes locaux formels de M de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \hat{F}(z, X))$.

Remarque 1.1.45. Dans [?] et [?], les deux définitions (équivalentes) de solution formelle pour l'idéal différentiel $\mathcal{I}$, toutes deux équivalentes à la définition 1.1.42 donnée ci-dessus, sont les suivantes :
- Soit (a, b) un point de Y_0. Un germe en (a, b) de solution formelle de $\mathcal{I}$ est un point $(a, b, \beta^1, \beta^2, \ldots)$ de $|Y|$.
L'équivalence de cette définition avec celle que l'on donne en 1.1.42 s'obtient en posant
$(a, b, \beta^1, \beta^2, \ldots) = (a, g(a), \frac{\partial g}{\partial y}(a), \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(a), \ldots)$.
- Soit (a, b) un point de Y_0. Un germe en (a, b) de solution formelle de $\mathcal{I}$ est la donnée d'un morphisme $u : \mathcal{O}_{Y,(a,b)} \to \widehat{\mathcal{O}}_{M,a}$ de $\mathbb{C}$-algèbres qui est l'identité sur $\mathcal{O}_{M,a}$ et tel que, en coordonnées, $uD_i = \frac{\partial}{\partial y_i} u$, avec $\frac{\partial}{\partial y_i}$ la dérivée partielles usuelle sur M par rapport à la coordonnée y_i.
L'équivalence de cette définition avec celle que l'on donne en 1.1.42 s'obtient en posant $u(E) = E.g = E(y, g(y), \frac{\partial g}{\partial y}(y), \ldots) \in \mathbb{C}[[y - a]]$, ce qui est bien défini, et donc en particulier, en coordonnées, $u(\bar{y}_i) = g_i$.

Définition 1.1.46. *Soit (a,b) un point de Y_0. Un germe en (a,b) de solution formelle d'ordre r de $\mathcal{I}_r$ est le r-jet d'un difféomorphisme local $g:(M,a)\to(M,b)$ tel que pour toute équation E de la fibre $(\mathcal{I}_r)_{(a,b)}$, le r-jet de la fonction $E.g$ est nul. De façon équivalente, c'est aussi un point de $|Y_r|$ au-dessus de (a,b). En effet, le r-jet au point a de la fonction $E(y,g(y),\frac{\partial g}{\partial y}(y),\ldots)$ ne dépend que du r-jet au point a de l'application g.*
L'ensemble des solutions formelles d'ordre r de $\mathcal{I}_r$ sera noté $\widehat{sol}_r(\mathcal{I}_r)$.
Pour les solutions formelles d'ordre r, on n'utilisera pas la terminologie de jet d'ordre r de solution également proposée dans [?] et [?] afin d'éviter des confusions possibles.

Exemple 1.1.47.
- Les solutions formelles d'ordre 2 de $\mathcal{Q}_2$ correspondent au lieu d'annulation $|Q_2|$ de l'idéal $\mathcal{Q}_2$ dans $|J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n,P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)|$. Il est décrit dans l'exemple 1.1.31. C'est exactement l'ensemble de tous les 2-jets de difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ de la forme $(z,X)\mapsto(\alpha z,F(z,X))$.
- On considère l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n,P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}$ défini en coordonnées par

$$\tilde{\mathcal{Q}}_2=\left\langle\frac{\partial\bar z}{\partial X},z\frac{\partial\bar z}{\partial z}-\bar z,\frac{\partial^2\bar z}{\partial z^2}\right\rangle.$$

On peut vérifier que $\widehat{sol}(\mathcal{Q}_2)=\widehat{sol}(\tilde{\mathcal{Q}}_2)$ et $sol(\mathcal{Q}_2)=sol(\tilde{\mathcal{Q}}_2)$. Par contre, on a l'inclusion stricte $\widehat{sol}_2(\mathcal{Q}_2)\subset\widehat{sol}_2(\tilde{\mathcal{Q}}_2)$. En effet, les coordonnées $\partial^2\bar z$ des éléments de $\widehat{sol}_2(\mathcal{Q}_2)$ sont nulles alors que parmi les coordonnées $\partial^2\bar z$ des éléments de $\widehat{sol}_2(\tilde{\mathcal{Q}}_2)$, seule la coordonnée $\frac{\partial^2\bar z}{\partial z^2}$ doit être nulle. Par exemple, le 2-jet $j^2_{(\zeta,\chi)}[(z,X)\mapsto(\alpha z+\beta zX_i,F(z,X))]$, pour $\alpha\in\mathbb{C}^*$, $\beta\in\mathbb{C}$, est une solution formelle d'ordre 2 de $\tilde{\mathcal{Q}}_2$. Il faut $\beta=0$ pour que ce soit une solution formelle d'ordre 2 de $\mathcal{Q}_2$.

1.1.3 Intégrabilité des systèmes différentiels

Dans cette partie, on cherche, sur des exemples simples, à motiver les questions d'intégrabilité des systèmes différentiels et comprendre le contenu des résultats qui sont exposés dans [?]. Cet exposé restera approximatif dans le sens suivant : on évoquera sans la définir précisément la notion de système différentiel involutif, qui donne des conditions suffisantes d'intégrabilité pour les systèmes différentiels.

Les systèmes différentiels involutifs

La résolution d'un système différentiel d'ordre fini $\mathcal{I}_r\subset\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ ne se limite pas toujours à résoudre les équations de $\mathcal{I}_r$ et de ses prolongements dans les différents espaces de jets $|J_{r+l}^*(M,M)|$. En effet, un prolongement $pr_l\mathcal{I}_r$ peut contenir des équations d'ordre r n'appartenant pas à $\mathcal{I}_r$ et donc donner des contraintes supplémentaires sur les r-jets des solutions de $\mathcal{I}_r$. Ceci interdit de considérer les solutions formelles d'ordre r de $\mathcal{I}_r$ comme des r-jets de solutions formelles (ou convergentes) de $\mathcal{I}_r$.

Exemple 1.1.48. Le prolongement $pr_1\tilde{\mathcal{Q}}_2$ contient les équations $\frac{\partial^2\bar z}{\partial X^2}$ et $\frac{\partial^2\bar z}{\partial X\partial z}$, équations qui ne sont pas dans $\tilde{\mathcal{Q}}_2$. Ces équations sont obtenues par dérivation du générateur $\frac{\partial\bar z}{\partial X}$. Aussi, les solutions formelles d'ordre 2 de $\tilde{\mathcal{Q}}_2$ ne sont pas nécessairement les 2-jets de solutions formelles (ou convergentes) de $\tilde{\mathcal{Q}}_2$. Par exemple, le 2-jet $j^2_{(\zeta,\chi)}[(z,X)\mapsto(\alpha z+\beta zX,F(z,X))]$, pour $\alpha\in\mathbb{C}^*$, $\beta\in\mathbb{C}$, est une solution formelle d'ordre 2 de $\tilde{\mathcal{Q}}_2$. Il faut $\beta=0$ pour que ce soit le 2-jet d'une solution convergente de $\tilde{\mathcal{Q}}_2$.

Définition 1.1.49. *Soit $\mathcal{I}_r\subset\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ un idéal cohérent d'ordre r qui définit une sous-variété fermée Y_r de $J_r^*(M,M)$. On note Y_{r+l} la sous-variété fermée de $J_{r+l}^*(M,M)$ définie par le prolongement $pr_l\mathcal{I}_r$.*

On dira que $\mathcal{I}_r$ est formellement intégrable à l'ordre 1 si la projection $|Y_{r+1}| \to |Y_r|$ est surjective. On dira que $\mathcal{I}_r$ est formellement intégrable si les projections $|Y_{r+l+1}| \to |Y_{r+l}|$, pour tout $l \geq 0$, sont surjectives.

Exemple 1.1.50.
- D'après les calculs des prolongements de $\mathcal{Q}_2$ de l'exemple 1.1.37, les solutions formelles d'ordre $2+l$ du prolongement $pr_l\mathcal{Q}_2$ sont de la forme

$$(z, X, \bar{z}, \bar{X}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X} \\ \frac{\partial \bar{X}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} \end{pmatrix}, \partial^2\bar{z}, \partial^2\bar{X}, \ldots) = (\zeta, \chi, \alpha\zeta, \star, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \star & \star \end{pmatrix}, 0, \star, \ldots, 0, \star)$$

donc l'idéal $\mathcal{Q}_2$ est formellement intégrable.
- Le prolongement $pr_1\tilde{\mathcal{Q}}_2$ est engendré par les générateurs $\mathcal{Q}_2$ et les monômes $\frac{\partial^3\bar{z}}{\partial z^3}, \frac{\partial^3\bar{z}}{\partial X \partial z^2}$ donc, étant donné les calculs de l'exemple 1.1.47, le 2-jet $j^2_{(\zeta,\chi)}[(z, X) \mapsto (\alpha z + \beta z X, F(z, X))]$, pour $\beta \neq 0$, n'est la projection d'aucune solution formelle d'ordre 3 de $pr_1\tilde{\mathcal{Q}}_2$. L'idéal $\tilde{\mathcal{Q}}_2$ n'est donc pas formellement intégrable à l'ordre 1.

Un idéal cohérent $\mathcal{I}_r \subset \mathcal{O}_{J^*_r(M,M)}$ n'est pas nécessairement formellement intégrable. Ses prolongements à tous les ordres peuvent contenir des obstructions (« cachées dans $\mathcal{I}_r$ ») à son intégrabilité. Aussi, vérifier si un système différentiel d'ordre fini est formellement intégrable demande *a priori* un nombre infini de tests.

La notion d'involutivité donne des conditions (en nombre fini) sur un système différentiel d'ordre fini pour qu'il ait de bonnes propriétés d'intégrabilité formelle. C'est essentiellement le théorème de Goldschmidt énoncé ci-dessous. Cependant, on ne précisera pas ici la définition de r-involutivité, et donc on ne précisera pas non plus l'énoncé exact du théorème de Goldschmidt. On se souviendra seulement de la version approximative suivante :

Théorème 1.1.51 (de Goldschmidt)**.** *Soit $\mathcal{I}_r$ un système différentiel r-involutif. Alors, d'une part, il est formellement intégrable, c'est-à-dire que toute solution formelle d'ordre r de $\mathcal{I}_r$ est le r-jet d'une solution formelle de $\mathcal{I}_r$, et d'autre part, tout prolongement $pr_l\mathcal{I}_r$, pour $l \in \mathbb{N}^*$, de $\mathcal{I}_r$, est un système différentiel $(r+l)$-involutif.*

Ensuite, le théorème de Cartan-Kähler assure l'existence de solutions convergentes pour les systèmes différentiels involutifs.

Théorème 1.1.52 (de Cartan-Kähler)**.** *Soit $\mathcal{I}_r$ un système différentiel r-involutif. Alors, toute solution formelle d'ordre r de $\mathcal{I}_r$ est le r-jet d'une solution convergente de $\mathcal{I}_r$.*

Involutivité générique des systèmes différentiels

Tout système différentiel d'ordre fini n'est pas nécessairement un système différentiel involutif. C'est par exemple le cas de $\tilde{\mathcal{Q}}_2$. Le théorème d'involutivité générique de Malgrange, énoncé dans [**?**] p. 64, assure que tout système différentiel d'ordre fini est, génériquement, équivalent à un système différentiel involutif, c'est-à-dire qu'il a le même ensemble de solutions qu'un système différentiel involutif.

Les exemples suivants montrent, pour le premier, la nécessité de prolonger un système différentiel pour obtenir un système différentiel formellement intégrable, et pour le second, que par ce procédé, on peut espérer obtenir un système formellement intégrable seulement en dehors d'un lieu singulier.

Exemple 1.1.53. D'après l'exemple 1.1.50, le système différentiel d'ordre fini $\tilde{\mathcal{Q}}_2$ n'est pas formellement intégrable, ne serait-ce qu'à l'ordre 1. Cependant, le prolongement $pr_1\tilde{\mathcal{Q}}_2$ contient le système

formellement intégrable $\mathcal{Q}_2$. On a même l'égalité $pr_1\tilde{\mathcal{Q}}_2 \cap \mathcal{O}_{J_2^*(M,M)} = \mathcal{Q}_2$. Les deux systèmes différentiels d'ordre finis $\tilde{\mathcal{Q}}_2$ et $\mathcal{Q}_2$ engendrent le même idéal différentiel $\mathcal{Q}'$ donc, d'après la remarque 1.1.39, ils ont les mêmes solutions.

Exemple 1.1.54. Considérons le système différentiel d'ordre 1, pour simplifier sur $P^1\mathbb{C}$, défini par $\mathcal{S}_1 = \langle z\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - \bar{z}\rangle$. Ses solutions formelles d'ordre 1 sont de la forme $(\zeta, \alpha\zeta, \alpha)$.
Le prolongement d'ordre 1 de ce système est $pr_1\mathcal{S}_1 = \left\langle z\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - \bar{z}, z\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2}\right\rangle$. Les solutions formelles d'ordre 2 de $pr_1\mathcal{S}_1$ sont donc de la forme $(\zeta, \alpha\zeta, \alpha, 0)$ si $\zeta \neq 0$, ou $(0, 0, \alpha, \beta)$. Le système différentiel $\mathcal{S}_1$ est donc formellement intégrable à l'ordre 1.
Par contre, le prolongement d'ordre 2 de $\mathcal{S}_1$ est $pr_2\mathcal{S}_1 = \left\langle z\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - \bar{z}, z\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2} + z\frac{\partial^3 \bar{z}}{\partial z^3}\right\rangle$. Les solutions formelles d'ordre 3 de $pr_2\mathcal{S}_1$ sont donc de la forme $(\zeta, \alpha\zeta, \alpha, 0, 0)$ si $\zeta \neq 0$, ou $(0, 0, \alpha, 0, \beta)$. Le système différentiel $\mathcal{S}_1$ n'est donc pas formellement intégrable en $\zeta = 0$.
Le prolongement d'ordre l de $\mathcal{S}_1$ est $pr_l\mathcal{S}_1 = \left\langle z\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - \bar{z}, z\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2}, (r-1)\frac{\partial^r \bar{z}}{\partial z^2} + z\frac{\partial^{r+1} \bar{z}}{\partial z^{r+1}}; 1 \leq r \leq l\right\rangle$. Les solutions formelles d'ordre $(1 + l)$ de $pr_l\mathcal{S}_1$ en $\zeta \neq 0$ sont donc de la forme $(\zeta, \alpha\zeta, \alpha, 0, \ldots, 0)$. Le système différentiel $\mathcal{S}_1$ est donc formellement intégrable hors de $\zeta = 0$.

Dans les énoncés qui suivent, tous les idéaux pseudo-cohérents et différentiels seront supposés réduits. Ceci ne change pas les solutions formelles ou convergentes du système, mais c'est seulement dans ce cadre qu'il y a de bons théorèmes de finitude.

Le théorème de finitude de Malgrange est obtenu dans [**?**] en même temps que le théorème d'involutivité générique. C'est un analogue dans le cadre analytique du théorème de Ritt-Radenbush, qui assure que tout idéal pseudo-cohérent, différentiel et réduit de $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}$ est engendré par un idéal cohérent d'ordre fini. Par contre, ces théorèmes ne donnent aucune condition d'involutivité sur l'idéal générateur.

Théorème 1.1.55 (de finitude, [**?**] p.61)**.** *Soit $\mathcal{I}^l$ une suite d'idéaux pseudo-cohérents, différentiels et réduits de $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}$. Alors, sur tout ouvert relativement compact de M^2, la suite $\mathcal{I}^l$ est stationnaire.*

Corollaire 1.1.56 ([**?**] p.62)**.** *En particulier, pour un idéal pseudo-cohérent, différentiel et réduit $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}$ et pour tout ouvert relativement compact U de M, il existe un entier $r_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{I}_{|U^2}$ est l'idéal différentiel réduit engendré par $(\mathcal{I}_{r_0})_{|U^2} := \mathcal{I}_{|U^2} \cap \mathcal{O}_{J^*_{r_0}(U,U)}$.*

Exemple 1.1.57. L'exemple 1.1.53 montre que l'idéal différentiel $\mathcal{Q}'$ admet plusieurs systèmes différentiels générateurs d'ordre fini, $\mathcal{Q}_2$ et $\tilde{\mathcal{Q}}_2$. Cependant, le second n'est pas formellement intégrable.
Dans cet exemple, on ne se demande pas si l'idéal $\mathcal{Q}'$ est réduit.

On retiendra du théorème d'involutivité générique de Malgrange que, sur tout ouvert relativement compact, et quitte à enlever un lieu singulier, tout idéal pseudo-cohérent, différentiel et réduit est engendré par un système différentiel d'ordre fini involutif.

Théorème 1.1.58 (d'involutivité générique)**.** *Soit $\mathcal{I}$ un système différentiel réduit sur M. Soit U un ouvert relativement compact de $|M|$. On note Y la D-sous-variété fermée de $J^*(U,U)$ définie par la restriction $\mathcal{I}_{|(U\times U)}$. Alors, il existe un entier $r_0 \geq 0$ et une sous-variété fermée Z_{r_0} de $|Y_{r_0}|$ de codimension ≥ 1 tels que, en désignant par Z_r l'image réciproque par la projection de Z_{r_0} dans $|Y_r|$, on ait :*
- le système différentiel $\mathcal{I}_{|(U\times U)}$ est le système différentiel engendré par $(\mathcal{I}_{r_0})\,|(U \times U)$,
- le système différentiel $(\mathcal{I}_{r_0})\,|(U \times U)$ est r_0-involutif hors de Z_{r_0},
- pour tout $r \geq r_0$, l'ensemble $|Y_r| \setminus Z_r$ est dense dans $|Y_r|$.

Exemple 1.1.59.
- L'exemple 1.1.54 montre que l'idéal différentiel engendré par $\mathcal{S}_1$ est, en dehors de la singularité $\zeta = 0$, engendré par le système différentiel formellement intégrable $\mathcal{S}_1$.
Dans cet exemple, on ne se demande pas si le système différentiel engendré par $\mathcal{S}_1$ est réduit.
- L'exemple 1.1.53 montre que l'idéal différentiel $\mathcal{Q}'$ engendré par $\tilde{\mathcal{Q}}_2$ est aussi engendré par le système différentiel formellement intégrable $\mathcal{Q}_2$.
Dans cet exemple, on ne se demande pas si l'idéal $\mathcal{Q}'$ est réduit.

1.2 Les D-groupoïdes

Un D-groupoïde est, essentiellement, un idéal différentiel dont l'ensemble des germes de solutions forme un groupoïde ensembliste.

On commencera par décrire la structure de groupoïde de l'ensemble $Aut(M)$ des germes de difféomorphismes locaux de M. Cette structure induit des structures de groupoïdes sur les ensembles $|J_r^*(M,M)|$ de r-jets de difféomorphismes locaux de M. Ces structures sont compatibles avec les projections et définissent donc une structure de groupoïde sur $|J^*(M,M)|$.

Ces structures se traduisent sur les faisceaux d'équations $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ et permettent de caractériser les systèmes différentiels d'ordre r sur M dont les solutions forment un groupoïde. Ceci permet ensuite de donner une définition naturelle de systèmes différentiels sur M, que l'on appellera D-groupoïdes stricts sur M, dont l'ensemble des solutions est un sous-groupoïde de $Aut(M)$.

Cependant, d'après [**?**], cette dernière définition est en pratique trop restrictive. La notion de D-groupoïde de Malgrange, développée dans [**?**], permet d'accepter un lieu singulier. On donnera cette définition et l'on décrira la situation naturelle qu'elle permet de prendre en compte.

1.2.1 Les groupoïdes ensemblistes

On rappelle qu'un groupoïde est, en toute généralité, une petite catégorie (les objets forment un ensemble) dans laquelle toutes les flèches sont inversibles.

Dans cette partie, on va préciser la structure de groupoïde des ensembles $Aut(M)$, $|J_r^*(M,M)|$ et $|J^*(M,M)|$. Les éléments de chacun de ces ensembles représentent les flèches (inversibles) d'une catégorie dont les objets sont les points de M.

Définition 1.2.1. *On appellera groupoïde ensembliste sur M un groupoïde dont les objets sont les points de M, c'est-à-dire une petite catégorie dont les objets sont les points de M et dont toutes les flèches sont inversibles.*

Les ensembles $Aut(M)$, $|J_r^*(M,M)|$ et $|J^*(M,M)|$ définissent des groupoïdes ensemblistes sur M en considérant les éléments de ces ensembles comme les flèches des groupoïdes. Cependant, pour bien définir ces structures, il faut préciser, pour chacun de ces ensembles, quels sont la source et le but de chaque flèche, quelle est la loi de composition sur les flèches, quelles sont les flèches identités, et il faut montrer que chaque flèche est inversible.

Exemple 1.2.2. *La structure de groupoïde ensembliste sur M de l'ensemble $Aut(M)$ des germes de difféomorphismes locaux de M est la donnée des applications suivantes :*
- la projection source :

$$\begin{array}{rccc} s: & Aut(M) & \to & |M| \\ & [f:(M,a)\mapsto(M,f(a))] & \mapsto & a \end{array}$$

- la projection but :

$$\begin{array}{rccc} t: & Aut(M) & \to & |M| \\ & [f:(M,a)\mapsto(M,f(a))] & \mapsto & f(a) \end{array}$$

- la composition, définie sur l'ensemble $Aut(M) \times_{|M|} Aut(M)$ constitué des couples (f, g) de germes tels que $t(f) = s(g)$:

$$\begin{array}{cccccc} c: & Aut(M) & \times_{|M|} & Aut(M) & \to & Aut(M) \\ & [f:(M,a) \mapsto (M, f(a))] & , & [g:(M,b) \mapsto (M, g(b))] & \mapsto & [g \circ f : (M,a) \mapsto (M, g \circ f(a))] \end{array}$$

- l'identité :

$$\begin{array}{cccc} e: & |M| & \to & Aut(M) \\ & a & \mapsto & [id : (M,a) \mapsto (M,a)] \end{array}$$

- l'inversion :

$$\begin{array}{cccc} i: & Aut(M) & \to & Aut(M) \\ & [f:(M,a) \mapsto (M, f(a))] & \mapsto & [f^{-1} : (M, f(a)) \mapsto (M, a)] \end{array}$$

Les projections naturelles $Aut(M) \to |J_r^*(M,M)|$, pour $r \in \mathbb{N}$, permettent de transporter la structure de groupoïde ensembliste de $Aut(M)$ sur les ensembles $|J_r^*(M,M)|$.

Exemple 1.2.3. *Soit $r \in \mathbb{N}$. La structure de groupoïde ensembliste de l'ensemble $|J_r^*(M,M)|$ des r-jets de difféomorphismes locaux de M est la donnée des applications suivantes (décrites à la fois par leur action sur les r-jets et à l'aide des coordonnées définies en* 1.1.17*) :*
- la projection source :

$$\begin{array}{cccc} s: & |J_r^*(M,M)| & \to & |M| \\ & j_a^r(f)_b & \mapsto & a \\ & (y, \bar{y}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r}) & \mapsto & y \end{array}$$

- la projection but :

$$\begin{array}{cccc} t: & |J_r^*(M,M)| & \to & |M| \\ & j_a^r(f)_b & \mapsto & b \\ & (y, \bar{y}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r}) & \mapsto & \bar{y} \end{array}$$

- la composition, définie sur l'ensemble $|J_r^*(M,M)| \times_{|M|} |J_r^*(M,M)|$ constitué des couples $(j^r(f), j^r(g))$ de r-jets tels que $t(j^r(f)) = s(j^r(g))$:

$$\begin{array}{ccccccc} c: & |J_r^*(M,M)| & \times_{|M|} & |J_r^*(M,M)| & \to & |J_r^*(M,M)| \\ & j_a^r(f)_b & , & j_b^r(g)_c & \mapsto & j_a^r(g \circ f)_c \\ & (y, \bar{y}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r}) & , & (\bar{y}, \bar{\bar{y}}, \frac{\partial \bar{\bar{y}}}{\partial \bar{y}}, \ldots, \frac{\partial^r \bar{\bar{y}}}{\partial \bar{y}^r}) & \mapsto & (y, \bar{\bar{y}}, \frac{\partial \bar{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \ldots) \end{array}$$

- l'identité :

$$\begin{array}{cccc} e: & |M| & \to & |J_r^*(M,M)| \\ & a & \mapsto & j_a^r(id)_a \\ & y & \mapsto & (y, y, Id_{n+1}, 0, \ldots, 0) \end{array}$$

- l'inversion :

$$\begin{array}{cccc} i: & |J_r^*(M,M)| & \to & |J_r^*(M,M)| \\ & j_a^r(f)_b & \mapsto & j_b^r(f^{-1})_a \\ & (y, \bar{y}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \ldots) & \mapsto & (\bar{y}, y, (\frac{\partial \bar{y}}{\partial y})^{-1}, \ldots) \end{array}$$

Les projections $Aut(M) \to |J_r^*(M,M)|$, pour $r \in \mathbb{N}$, étant compatibles avec les projections $|\pi|_r^{r+s}$: $|J_{r+s}^*(M,M)| \to |J_r^*(M,M)|$, les différentes structures de groupoïdes ensemblistes des ensembles $|J_r^*(M,M)|$ définissent une structure de groupoïde ensembliste sur l'ensemble limite $|J^*(M,M)|$.

Exemple 1.2.4. *La structure de groupoïde ensembliste de l'ensemble $|J^*(M,M)|$ des difféomorphismes locaux formels de M est la donnée des applications suivantes (décrites sur les points de*

$|J^*(M,M)|$) :
- *la projection source :*

$$\begin{array}{rccc} s: & |J^*(M,M)| & \to & |M| \\ & (a,b,\beta^1,\beta^2,\ldots) & \mapsto & a \end{array}$$

- *la projection but :*

$$\begin{array}{rccc} t: & |J^*(M,M)| & \to & |M| \\ & (a,b,\beta^1,\beta^2,\ldots) & \mapsto & b \end{array}$$

- *la composition, définie sur l'ensemble* $|J^*(M,M)| \times_{|M|} |J^*(M,M)|$ *constitué des couples* (f,g) *de difféomorphismes locaux formels de* M *tels que* $t(f) = s(g)$ *:*

$$\begin{array}{rccccc} c: & |J^*(M,M)| & \times_{|M|} & |J^*(M,M)| & \to & |J^*(M,M)| \\ & (a,b,\beta^1,\beta^2,\ldots) & , & (b,c,\gamma^1,\gamma 2,\ldots) & \mapsto & (a,c,\gamma^1\beta^1,\ldots) \end{array}$$

- *l'identité :*

$$\begin{array}{rccc} e: & |M| & \to & |J^*(M,M)| \\ & a & \mapsto & (a,a,Id_{n+1},0,0,\ldots) \end{array}$$

- *l'inversion :*

$$\begin{array}{rccc} i: & |J^*(M,M)| & \to & |J^*(M,M)| \\ & (a,b,\beta^1,\beta^2,\ldots) & \mapsto & (b,a,(\beta^1)^{-1},\ldots) \end{array}$$

Définition 1.2.5. *Soit* G *un groupoïde ensembliste sur* M*. On appellera sous-groupoïde ensembliste de* G *la donnée d'un sous-ensemble* H *de l'ensemble des flèches de* G*, tel que :*
(i) le sous-ensemble H *est stable pour la composition des flèches dont le but de la première correspond à la source de la seconde,*
(ii) toutes les flèches identité de G *sont dans* H*,*
(iii) le sous-ensemble H *est stable pour l'inversion des flèches.*
La donnée d'un sous-groupoïde ensembliste de G *définit donc encore un groupoïde ensembliste sur* M*.*

Exemple 1.2.6. L'ensemble $sol(\mathcal{Q}')$ des solutions convergentes de l'idéal différentiel $\mathcal{Q}'$, qui est calculé dans l'exemple 1.1.40 et qui est constitué des germes de difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ de la forme $(z,X) \mapsto (\alpha z, F(z,X))$, définit un sous-groupoïde ensembliste de $Aut(M)$. En effet,
- tous les germes de l'application identité de M ont cette forme, avec $\alpha = 1$ et $F(z,X) = X$, et sont donc des solutions de $\mathcal{Q}'$,
- on a $c[(z,X) \mapsto (\alpha_1 z, F_1(z,X)), (z,X) \mapsto (\alpha_2 z, F_2(z,X))] = (z,X) \mapsto (\alpha_2\alpha_1 z, F_2(\alpha_1 z, F_1(z,X)))$,
- et $i[(z,X) \mapsto (\alpha z, F(z,X)] = (z,X) \mapsto (\alpha^{-1} z, G(z,X))$, pour une certaine application G.

Exemple 1.2.7. L'ensemble $|Q_2| = \widehat{sol}_2(\mathcal{Q}_2)$ des solutions formelles d'ordre 2 du système différentiel $\mathcal{Q}_2$, qui est calculé dans l'exemple 1.1.31 et qui est constitué des 2-jets de difféomorphismes locaux de la forme $(z,X) \mapsto (\alpha z, F(z,X))$, définit un sous-groupoïde ensembliste de $|J_2^*(M,M)|$. Ceci peut être vérifié par le calcul mais vient également du fait que ce sont exactement les 2-jets des éléments de $sol(\mathcal{Q}')$ qui définit, d'après l'exemple 1.2.6 précédent, un sous-groupoïde ensembliste de $Aut(M)$.

Exemple 1.2.8. On vérifie, comme dans l'exemple 1.2.6, que l'ensemble $\widehat{sol}(\mathcal{Q}')$ des solutions formelles de l'idéal différentiel $\mathcal{Q}'$, qui est décrit dans l'exemple 1.1.44 et qui est constitué des germes de difféomorphismes locaux formels de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme $(z,X) \mapsto (\alpha z, \widehat{F}(z,X))$, définit un sous-groupoïde ensembliste de $|J^*(M,M)|$.

Propriété 1.2.9. *Soit* G *l'ensemble des flèches d'un groupoïde ensembliste sur* M*. Toute intersection de sous-groupoïdes ensemblistes de* G *définit encore un sous-groupoïde ensembliste de* G*.*
On peut donc parler du groupoïde ensembliste sur M *engendré par un sous-ensemble (quelconque) de* G*.*

Démonstration. On le vérifie facilement. □

1.2.2 Les groupoïdes d'ordre fini

Soit un entier $r \in \mathbb{N}$ fixé. On va préciser la structure induite sur $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ par la structure de groupoïde ensembliste de $|J_r^*(M,M)|$. Cette structure est un analogue, dans le cadre des groupoïdes, de la structure d'algèbre de Hopf induite par un groupe algébrique sur son algèbre affine. Ici cependant, il faut tenir compte de la condition de compatibilité que l'on demande pour la composition de deux r-jets.
Ensuite, on va donner une caractérisation des systèmes différentiels d'ordre r sur M dont les ensembles de solutions forment un groupoïde ensembliste sur M. Là encore, c'est un analogue, dans le cadre des groupoïdes, de la caractérisation des idéaux de l'algèbre de Hopf d'un groupe algébrique qui définissent un sous-groupe algébrique.

Prélude : les groupes algébriques affines complexes

Le but de cette partie est de préciser, dans le cadre des groupes algébriques affines complexes, la structure induite par un groupe algébrique sur l'algèbre affine de la variété algébrique sous-jacente.

Les définitions et propriétés énoncées dans cette partie sont reprises de [**?**] et ne seront pas toujours justifiées.

Définition 1.2.10. *Nous appellerons variété algébrique affine complexe le lieu d'annulation V dans un espace affine $\mathbb{C}^n$ d'un idéal radiciel I de $\mathbb{C}[T_1,\dots,T_n]$ (c'est-à-dire un idéal égal à son radical : $I = \sqrt{I}$). Nous noterons $\mathbb{C}[V]$, et nous appellerons algèbre affine de V, la $\mathbb{C}$-algèbre réduite de type fini $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[T_1,\dots,T_n]/I$.*
Un morphisme de variétés algébriques affines complexes $\varphi : V \subset \mathbb{C}^n \to W \subset \mathbb{C}^p$ est une application de la forme $(t_1,\dots,t_n) \mapsto (\varphi_1(t_1,\dots,t_n),\dots,\varphi_p(t_1,\dots,t_n))$, avec $\varphi_1,\dots,\varphi_p \in \mathbb{C}[V]$. On appelle comorphisme associé à φ le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\varphi^* : \mathbb{C}[W] \to \mathbb{C}[V]$ défini par $P \mapsto P \circ \varphi$.

Remarque 1.2.11. Le lieu d'annulation dans $\mathbb{C}^n$ d'un ensemble de polynômes de $\mathbb{C}[T_1,\dots,T_n]$ coïncide avec le lieu d'annulation de l'idéal radiciel qu'ils engendrent, et définit donc une variété algébrique affine complexe.
Cependant, grâce au théorème des zéros de Hilbert, la définition 1.2.10 ci-dessus induit une équivalence de catégories entre la catégorie des variétés algébriques affines complexes et la catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres réduites de type fini.
En particulier, toute $\mathbb{C}$-algèbre réduite de type fini provient d'une variété algébrique affine complexe plongée dans un espace affine $\mathbb{C}^n$. Plusieurs plongements sont possibles. On s'autorisera donc à parler de variété algébrique affine complexe, et même de $\mathbb{C}$-algèbre réduite de type fini, à isomorphisme près.

Définition 1.2.12. *Soient $V \subset \mathbb{C}^n$ et $W \subset \mathbb{C}^p$ deux variétés algébriques affines complexes. On note $\mathbb{C}[V]$ et $\mathbb{C}[W]$ leurs algèbres affines respectives. Le produit cartésien $V \times W$ est naturellement muni d'une structure de variété algébrique affine complexe plongée dans $\mathbb{C}^{n+p}$ (cf [**?**] p.9), que l'on appelle (variété algébrique affine complexe) produit. L'algèbre affine du produit $V \times W$ est $\mathbb{C}[V \times W] = \mathbb{C}[V] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[W]$.*

Définition 1.2.13. *Un groupe algébrique affine complexe est une variété algébrique affine complexe G munie d'une structure compatible de groupe, c'est-à-dire telle que les applications (qui définissent la structure de groupe) suivantes :*
- le produit :

$$\begin{array}{rccc} \mu : & G \times G & \to & G \\ & (x,y) & \mapsto & x.y \end{array}$$

- le neutre :

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & \{1\} & \to & G \\ & 1 & \mapsto & e \end{array}$$

- l'inversion :

$$\begin{array}{rccc} \iota : & G & \to & G \\ & x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

sont des morphismes de variétés algébriques affines complexes.
*La structure de groupe algébrique affine complexe de G munit l'algèbre affine $\mathbb{C}[G]$ d'une structure d'algèbre de Hopf (cf [**?**] p. 56) par la donnée des comorphismes suivants :*
- la coproduit :

$$\begin{array}{rccc} \mu^* : & \mathbb{C}[G] & \to & \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] \\ & P & \mapsto & P \circ \mu \end{array}$$

- le coneutre :

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon^* : & \mathbb{C}[G] & \to & \mathbb{C} \\ & P & \mapsto & P \circ \epsilon = P(e) \end{array}$$

- la coinversion :

$$\begin{array}{rccc} \iota^* : & \mathbb{C}[G] & \to & \mathbb{C}[G] \\ & P & \mapsto & P \circ \iota \end{array}$$

*Un morphisme de groupes algébriques affines complexes est un morphisme entre les variétés algébriques affines complexes sous-jacentes qui est aussi un morphisme de groupes. Le comorphisme associé est un morphisme d'algèbres de Hopf (cf [**?**] p. 56).*

Exemple 1.2.14. La structure (naturelle) de variété algébrique affine complexe de $GL_n(\mathbb{C})$ est donnée par l'identification de $GL_n(\mathbb{C})$ avec le lieu des zéros dans $\mathbb{C}^{n^2+1}$ de l'idéal radiciel $\langle D.\det(T_{i,j}) - 1\rangle$ de $\mathbb{C}[T_{i,j}, D]$, où $1 \leq i, j \leq n$.
L'algèbre affine de $GL_n(\mathbb{C})$ est $\mathbb{C}[GL_n(\mathbb{C})] = \mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}]$, avec $\Delta = \det(T_{i,j})$.

La structure de groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ est la donnée des applications suivantes :
- le produit :

$$\begin{array}{rccc} \mu : & GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}) & \to & GL_n(\mathbb{C}) \\ & (A, B) & \mapsto & AB \end{array}$$

- le neutre :

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & \{1\} & \to & GL_n(\mathbb{C}) \\ & 1 & \mapsto & I_n \end{array}$$

- l'inversion :

$$\begin{array}{rccc} \iota : & GL_n(\mathbb{C}) & \to & GL_n(\mathbb{C}) \\ & A & \mapsto & A^{-1} \end{array}$$

Ces applications sont polynomiales en les coefficients des matrices, et sont donc des morphismes de variétés algébriques affines complexes. Les structures de variété algébrique affine complexe et de groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ sont donc compatibles, et définissent une structure de groupe algébrique affine complexe sur $GL_n(\mathbb{C})$.

La structure d'algèbre de Hopf de l'algèbre affine $\mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}]$ de $GL_n(\mathbb{C})$ est la donnée des comorphismes suivants :
- le coproduit :

$$\begin{array}{rccc} \mu^* : & \mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}] & \to & \mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}] \\ & P & \mapsto & P \circ \mu \end{array}$$

On a $\mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}] = \mathbb{C}[T_{i,j} \otimes 1, \Delta^{-1} \otimes 1, 1 \otimes T_{i,j}, 1 \otimes \Delta^{-1}]$. Si l'on note $T_{i,j} = T_{i,j} \otimes 1$ et $S_{i,j} = 1 \otimes T_{i,j}$, on a

$$\mu^*(T_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} T_{i,k} S_{k,j}$$

- le coneutre :

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon^* : & \mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}] & \to & \mathbb{C} \\ & P & \mapsto & P \circ \epsilon = P(I_n) \\ & (T_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} & \mapsto & I_n \end{array}$$

- la coinversion :

$$\begin{array}{rccc} \iota^* : & \mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}] & \to & \mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}] \\ & P & \mapsto & P \circ \iota \\ & (T_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} & \mapsto & \Delta^{-1} . {}^t Co(T_{i,j}) \end{array}$$

Définition 1.2.15. *Soit $(G, \mu, \varepsilon, \iota)$ un groupe algébrique affine complexe et soit $(\mathbb{C}[G], \mu^*, \varepsilon^*, \iota^*)$ son algèbre de Hopf.*
Un sous-groupe algébrique affine complexe de G est une sous-variété algébrique affine complexe H de G qui est aussi un sous-groupe de G.
De façon équivalente, un sous-groupe algébrique de G est le lieu d'annulation d'un idéal radiciel I de $\mathbb{C}[G]$ tel que :
(i) $\mu^*(I) \subset I \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G] + \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}} I$
(ii) $I \subset \ker \varepsilon^*$
(iii) $\iota^*(I) \subset I$

Remarque 1.2.16. Le théorème de linéarisation des groupes algébriques affines (*cf* [**?**] p. 62) assure que tout groupe algébrique affine complexe est isomorphe à un sous-groupe algébrique affine complexe de $GL_n(\mathbb{C})$, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Aussi, les définitions 1.2.13 et 1.2.15 définissent les mêmes objets.

Exemple 1.2.17.
- Le groupe $\mathbb{C}^*$, identifié à $GL_1(\mathbb{C})$, a une structure de groupe algébrique que l'on appelle groupe multiplicatif et que l'on note $\mathbb{G}_m$. Son algèbre de Hopf est $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ avec $\mu^*(T) = T \otimes T$ ($= TS$ avec l'identification faite dans l'exemple 1.2.14), $\varepsilon^*(T) = 1$ et $\iota^*(T) = T^{-1}$.
- Les sous-groupes algébriques stricts du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ sont les groupes finis de racines de l'unité.
- Le groupe $\mathbb{C}$, identifié au sous-groupe algébrique de $GL_2(\mathbb{C})$ constitué des matrices unipotentes $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, avec $a \in \mathbb{C}$, a une structure de groupe algébrique que l'on appelle groupe additif et que l'on note $\mathbb{G}_a$. L'idéal qui définit ce sous-groupe algébrique de $GL_2(\mathbb{C})$ est l'idéal radical de $\mathbb{C}[T_{1,1}, T_{1,2}, T_{2,1}, T_{2,2}, \Delta^{-1}]$ engendré par les polynômes $T_{1,1} - 1$, $T_{2,1}$ et $T_{2,2} - 1$. Son algèbre de Hopf s'identifie à $\mathbb{C}[T]$ avec $\mu^*(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T$ ($= T + S$ avec l'identification faite dans l'exemple 1.2.14), $\varepsilon^*(T) = 0$ et $\iota^*(T) = -T$.
- Le seul sous-groupe algébrique strict du groupe additif $\mathbb{C}$ est $\{0\}$.

Préliminaires : deux constructions classiques de théorie de faisceaux

On rappelle ici deux constructions classiques de théorie de faisceaux, par exemple définies dans [**?**], que l'on explicite sur des exemples dont on aura besoin par la suite pour préciser la structure induite sur $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ par la structure de groupoïde ensembliste de $|J_r^*(M, M)|$.

Définition 1.2.18. *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques et soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. On appelle image directe de $\mathcal{F}$ par f, que l'on note $f_*\mathcal{F}$, le faisceau sur Y défini pour tout ouvert U de Y par $\Gamma(U, f_*\mathcal{F}) = \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{F})$.*

Exemple 1.2.19. Soit $r \in \mathbb{N}$.
- L'image directe du faisceau $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ par la projection source $s : |M^2| \to |M|$ est un faisceau sur $|M|$, noté $s_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$, et défini pour U un ouvert de M par $\Gamma(U, s_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}) = \Gamma(U \times M, \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)})$. C'est un faisceau sur M de $\mathcal{O}_M$-algèbres, pour la multiplication des sections par des fonctions holomorphes de la variable source, et de $\mathcal{O}_M(M)$-algèbres, pour la multiplication des

sections par des fonctions holomorphes de la variable but définies partout sur M.
- L'image directe du faisceau $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ par la projection but $t : |M^2| \to |M|$ est un faisceau sur $|M|$, noté $t_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$, et défini pour U un ouvert de M par $\Gamma(U, t_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}) = \Gamma(M \times U, \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)})$. C'est un faisceau sur M de $\mathcal{O}_M(M)$-algèbres, pour la multiplication des sections par des fonctions holomorphes de la variable source définies partout sur M, et de $\mathcal{O}_M$-algèbres, pour la multiplication des sections par des fonctions holomorphes de la variable but.
- L'image directe du faisceau $\mathcal{O}_M$ par l'application identité $e : |M| \to |M^2|$, est un faisceau sur M^2, noté $e_*\mathcal{O}_M$, et défini pour Ω un ouvert de M^2 par $\Gamma(\Omega, b_*\mathcal{O}_M) = \Gamma(e^{-1}(\Omega), \mathcal{O}_M)$. C'est un faisceau sur M^2 de $\mathbb{C}$-algèbres.
- L'image directe du faisceau $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ par l'inversion $i : |M^2| \to |M^2|$ est un faisceau sur M^2, noté $i_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$, et défini pour Ω un ouvert de M par $\Gamma(\Omega, i_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}) = \Gamma(i^{-1}(\Omega), \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)})$. C'est un faisceau sur M^2 de $\mathbb{C}$-algèbres.

Définition 1.2.20. *Soient deux espaces topologiques X et Y, un anneau A, un faisceau $\mathcal{F}$ sur X de A-modules et un faisceau $\mathcal{G}$ sur Y de A-modules. On définit sur l'espace topologique produit $X \times Y$ un faisceau de groupes abéliens noté $\mathcal{N} = \mathcal{F} \widehat{\otimes}_A \mathcal{G}$, appelé produit tensoriel total de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur A et dont la fibre $\mathcal{N}_{(x,y)}$ en un point $(x, y) \in X \times Y$ est isomorphe à $\mathcal{F}_x \otimes_A \mathcal{G}_y$. La description des sections locales de ce faisceau est donnée dans [?], p. 143.*

Exemple 1.2.21.
- Le faisceau $\mathcal{O}_M$ est un faisceau sur M de $\mathbb{C}$-algèbres. Le produit tensoriel total sur $\mathbb{C}$ de deux copies de ce faisceau est noté $\mathcal{O}_M \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_M$. C'est un faisceau sur $M \times M$. Une section locale de ce faisceau est localement donnée, sur un ouvert suffisamment petit de M^2 de la forme $U \times V \subset M \times M$, par un élément de $\Gamma(U, \mathcal{O}_M) \otimes_{\mathcal{O}_M(M)} \Gamma(V, \mathcal{O}_M)$.
Le faisceau $\mathcal{O}_M \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_M$ est un sous-faisceau strict de $\mathcal{O}_{M^2}$. En effet, la fonction $e^{xy} \in \mathbb{C}\{x, y\}$ n'est pas un élément de $\mathbb{C}\{x\} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{y\}$. Sinon, on pourrait écrire $e^{xy} = \sum_{i=1}^{k} f_i(x)g_i(y)$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, $f_i \in \mathbb{C}\{x\}$ et $g_i \in \mathbb{C}\{y\}$. Et donc, pour tout $a \in \mathbb{C}$, la fonction e^{ax} serait un élément du $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie engendré par les fonctions $f_1, \ldots, f_k$. Or, toute famille finie de $(k + 1)$ fonctions $e^{a_0x}, \ldots, e^{a_kx}$ deux à deux distinctes est $\mathbb{C}$-libre. La vérification de ce fait se ramène à la résolution d'un système de Vandermonde dont les coefficients sont $a_0, \ldots, a_k$.
- Les faisceaux $s_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ et $t_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ sur M sont des faisceaux de $\mathcal{O}_M(M)$-algèbres. Leur produit tensoriel total sur l'anneau $\mathcal{O}_M(M)$ est noté $s_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_M(M)} t_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$. C'est un faisceau sur M^2. Une section locale de ce faisceau est localement donnée, sur un ouvert suffisamment petit de M^2 de la forme $U \times W \subset M \times M$, par un élément de $\Gamma(U, s_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}) \otimes_{\mathcal{O}_M(M)} \Gamma(W, t_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)})$, c'est-à-dire un élément de $\Gamma(U \times M, \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}) \otimes_{\mathcal{O}_M(M)} \Gamma(M \times W, \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)})$.
Les faisceaux $s_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ et $t_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ sont aussi des faisceaux de $\mathcal{O}_M$-algèbres, l'un pour la multiplication des sections par des fonctions holomorphes de la variable source, l'autre pour la multiplication des sections par des fonctions holomorphes de la variable but. Aussi leur produit tensoriel total sur l'anneau $\mathcal{O}_M(M)$, le faisceau $s_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_M(M)} t_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$, est un faisceau de $\big(\mathcal{O}_M \widehat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_M\big)$-algèbres.

Les groupoïdes d'ordre r sur M

Les applications ensemblistes c, e et i qui définissent la structure de groupoïde ensembliste de $|J_r^*(M, M)|$ (*cf* exemple 1.2.3) sont en fait des morphismes de variétés complexes mixtes. Cela permet de rendre compte de la structure de groupoïde ensembliste de $|J_r^*(M, M)|$ sur le faisceau $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ des équations. On va préciser cette structure.
Ensuite, grâce à cette structure supplémentaire sur $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$, on va caractériser les systèmes différentiels d'ordre r sur M dont l'ensemble des solutions est un groupoïde ensembliste sur M. On étudiera deux exemples dans les deux parties qui suivront.

On rappelle que l'on utilise la notation 1.1.17 à la fois pour représenter les coordonnées sur les espaces de r-jets $|J_r^*(M,M)|$ et pour représenter des sections des faisceaux $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$.

Définition 1.2.22. *La structure de groupoïde d'ordre r de la variété affine $J_r^*(M,M) = (M^2, \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)})$ est la donnée des morphismes de faisceaux suivants (décrits à la fois par leur action sur les fonctions régulières et à l'aide des coordonnées locales) :*
- le cosource :

$$\begin{array}{rccl} s^* : & \mathcal{O}_M & \to & s_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} \\ & f & \mapsto & f \circ s \\ & f & \mapsto & f(y) \end{array}$$

- le cobut :

$$\begin{array}{rccl} t^* : & \mathcal{O}_M & \to & t_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} \\ & f & \mapsto & f \circ t \\ & f & \mapsto & f(\bar{y}) \end{array}$$

- la cocomposition :

$$\begin{array}{rccl} c^* : & \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} & \to & s_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_M(M)} t_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} \\ & E & \mapsto & E \circ c \\ & E(y, \bar{y}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \delta^{-1}, \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r}) & \mapsto & E(y, \bar{\bar{y}}, \frac{\partial \bar{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \det(\frac{\partial \bar{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y})^{-1}, \ldots) \end{array}$$

- le coneutre :

$$\begin{array}{rccl} e^* : & \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} & \to & e_*\mathcal{O}_M \\ & E & \mapsto & E \circ e \\ & E(y, \bar{y}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \delta^{-1}, \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r}) & \mapsto & E(y, y, Id_{n+1}, 1, 0, \ldots, 0) \end{array}$$

- la coinversion :

$$\begin{array}{rccl} i^* : & \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} & \to & i_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} \\ & E & \mapsto & E \circ i \\ & E(y, \bar{y}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \delta^{-1}, \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r}) & \mapsto & E(\bar{y}, y, (\frac{\partial \bar{y}}{\partial y})^{-1}, \delta, \ldots) \end{array}$$

On note désormais $J_r^*(M,M)$ la variété affine au-dessus de M^2 des r-jets de difféomorphismes locaux de M munie de sa structure de groupoïde d'ordre r.

Définition 1.2.23. *On appellera groupoïde d'ordre r sur M, ou encore sous-groupoïde fermé de $J_r^*(M,M)$, la donnée d'un système différentiel d'ordre r sur M, c'est-à-dire d'un idéal cohérent $\mathcal{G}_r$ de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$, qui vérifie les trois propriétés suivantes :*
(i)

$$c^*\mathcal{G}_r \subset (s_*\mathcal{G}_r) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_M(M)} \left(t_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}\right) + \left(s_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}\right) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_M(M)} (t_*\mathcal{G}_r)$$

(ii)

$$\mathcal{G}_r \subset \ker e^*$$

(iii)

$$\iota^*\mathcal{G}_r \subset \mathcal{G}_r$$

Par la suite, pour simplifier, la condition (i) sera abusivement écrite : $c^*\mathcal{G}_r \subset \mathcal{G}_r \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} + \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} \widehat{\otimes} \mathcal{G}_r$.

Remarque 1.2.24. Dans les deux parties qui vont suivre, on va étudier deux exemples de groupoïdes d'ordre fini sur M. Les applications de la définition 1.2.22 seront détaillées à l'aide des coordonnées $(z, X_1, \ldots, X_n)$, ... On va ainsi pouvoir vérifier explicitement pour les exemples considérés, les conditions *(i)*, *(ii)* et *(iii)* de la définition 1.2.23 précédente.

Propriété 1.2.25. *Soit $\mathcal{G}_r$ un groupoïde d'ordre r sur M. Alors, l'ensemble $\widehat{sol}_r(\mathcal{G}_r)$ de ses solutions formelles d'ordre r est un sous-groupoïde ensembliste de $|J_r^*(M,M)|$, l'ensemble $\widehat{sol}(\mathcal{G}_r)$ de ses solutions formelles est un sous-groupoïde ensembliste de $|J^*(M,M)|$ et l'ensemble $sol(\mathcal{G}_r)$ de ses solutions convergentes est un sous-groupoïde ensembliste de $Aut(M)$.*

Démonstration. On le montre pour l'ensemble $\widehat{sol}_r(\mathcal{G}_r)$ de solutions formelles d'ordre r de $\mathcal{G}_r$. Il s'agit de vérifier les conditions *(i)*, *(ii)* et *(iii)* de la définition 1.1.46 sur $\widehat{sol}_r(\mathcal{G}_r)$:
(i) : Soient $j_a^r(f)_b$ et $j_b^r(g)_c$ deux solutions formelles d'ordre r de $\mathcal{G}_r$ et soit E une équation de la fibre $(\mathcal{G}_r)_{(a,c)}$. Alors, d'après la définition 1.1.46, le r-jet $c(j_a^r(f)_b, j_b^r(g)_c) = j_a^r(g\circ f)_c$ est une solution formelle d'ordre r de E si $0 = E(j_a^r(g\circ f)_c) = (E\circ c)(j_a^r(f)_b, j_b^r(g)_c) = c^*E(j_a^r(f)_b, j_b^r(g)_c)$. Or, parce que $\mathcal{G}_r$ vérifie la condition *(i)* de la définition 1.2.23 précédente, on a $c^*E = \sum_{i=1}^k F_i \widehat{\otimes} G_i$, avec $F_i \in (s_*\mathcal{G}_r)_a$ ou $G_i \in (t_*\mathcal{G}_r)_c$, et donc $F_i(j_a^r(f)_b) = 0$ ou $G_i(j_b^r(g)_c) = 0$. Aussi, $c^*E(j_a^r(f)_b, j_b^r(g)_c) = \sum_{i=1}^k F_i(j_a^r(f)_b)G_i(j_b^r(g)_c) = 0$.
(ii) : Soit E une équation d'une fibre $(\mathcal{G}_r)_{(a,a)}$. Alors, $E(j_a^r(id)_a) = E(a,a,Id_{n+1},0,\dots,0) = (E\circ e)(a) = 0$, parce que $\mathcal{G}_r$ vérifie la condition *(ii)* de la définition 1.2.23 précédente.
(iii) : Soit $j_a^r(f)_b$ une solution formelle d'ordre r de $\mathcal{G}_r$ et soit E une équation de la fibre $(\mathcal{G}_r)_{(b,a)}$. Alors, $E(i(j_a^r(f)_b)) = i^*E(j_a^r(f)_b) = 0$, parce que $\mathcal{G}_r$ vérifie la condition *(iii)* de la définition 1.2.23 précédente.
On montre par des méthodes similaires que les ensembles $\widehat{sol}(\mathcal{G}_r)$ et $sol(\mathcal{G}_r)$ sont des groupoïdes ensemblistes sur M. □

Proposition 1.2.26 ([?], proposition 2.3.3., p. 472)**.** *Soit $\mathcal{G}_r$ un groupoïde d'ordre r sur M. Alors, le prolongement $pr_1\mathcal{G}_r$ est un groupoïde d'ordre $r+1$ sur M et par conséquent, pour tout $l \geq 2$, le prolongement $pr_l\mathcal{G}_r$ est un groupoïde d'ordre $r+l$ sur M.*

Exemple 1 : le sous-groupoïde fermé de $J_2^*(M,M)$ défini par $\mathcal{Q}_2$

On considère le système différentiel d'ordre 2 sur M défini par l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_{J_2^*(M,M)}$, décrit en coordonnées par :

$$\mathcal{Q}_2 = \left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial X}, z\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - \bar{z}, \partial^2\bar{z} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial X}, z\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - \bar{z}, \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z \partial X}, \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial X^2}, \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2} \right\rangle$$

On va montrer qu'il définit un sous-groupoïde fermé de $J_2^*(M,M)$, c'est-à-dire qu'il vérifie les conditions *(i)*, *(ii)* et *(iii)* de la définition 1.2.23.
Pour cela, on aura besoin d'expliciter les morphismes e^*, c^* et i^* de la définition 1.2.22 à l'aide des coordonnées.

Condition *(i)*
On a besoin des calculs préliminaires suivants : pour deux applications $f, g : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ de classe $\mathcal{C}^2$,
on a

$$\frac{\partial (g\circ f)_l}{\partial x_i} = \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j}\circ f\right)$$

et

$$\frac{\partial^2 (g\circ f)_l}{\partial x_k \partial x_i} = \sum_{j=0}^n \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i}\left(\frac{\partial g_l}{\partial y_j}\circ f\right) + \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\sum_{p=0}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 g_l}{\partial y_p \partial y_j}\circ f\right)$$

On a d'abord $c^*(z,X) = (z,X)$ et $c^*(\bar{z},\bar{X}) = (\bar{\bar{z}},\bar{\bar{X}})$,
et

$$c^*\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X} \\ \frac{\partial \bar{X}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} & \frac{\partial \bar{\bar{z}}}{\partial \bar{X}} \\ \frac{\partial \bar{\bar{X}}}{\partial \bar{z}} & \frac{\partial \bar{\bar{X}}}{\partial \bar{X}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X} \\ \frac{\partial \bar{X}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} \end{pmatrix}$$

On a donc déjà

$$c^*\left(\frac{\partial \bar z}{\partial X}\right) = \frac{\partial \bar{\bar z}}{\partial \bar z}\frac{\partial \bar z}{\partial X} + \frac{\partial \bar{\bar z}}{\partial \bar X}\frac{\partial \bar X}{\partial X} \in \mathcal{O}_{J_2^*(M,M)}\widehat{\otimes}\mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_2\widehat{\otimes}\mathcal{O}_{J_2^*(M,M)}$$

$$\begin{array}{rcl} c^*(\frac{\partial \bar z}{\partial z}z - \bar z) & = & (\frac{\partial \bar{\bar z}}{\partial \bar z}\frac{\partial \bar z}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\bar z}}{\partial X}\frac{\partial \bar X}{\partial z})z - \bar{\bar z} \\ & = & \frac{\partial \bar{\bar z}}{\partial \bar z}(\frac{\partial \bar z}{\partial z}z - \bar z) + \frac{\partial \bar{\bar z}}{\partial \bar z}\bar z - \bar{\bar z} + \frac{\partial \bar{\bar z}}{\partial X}\frac{\partial \bar X}{\partial z}z \\ & \in & \mathcal{O}_{J_2^*(M,M)}\widehat{\otimes}\mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_2\widehat{\otimes}\mathcal{O}_{J_2^*(M,M)} + \mathcal{Q}_2\widehat{\otimes}\mathcal{O}_{J_2^*(M,M)} \end{array}$$

Ensuite, on déduit du calcul préliminaire que

$$c^*(\frac{\partial^2 \bar z}{\partial z^2}) = \frac{\partial^2 \bar z}{\partial z^2}\frac{\partial \bar{\bar z}}{\partial \bar z} + \frac{\partial \bar z}{\partial z}\left(\frac{\partial \bar z}{\partial z}\frac{\partial^2 \bar{\bar z}}{\partial \bar z^2} + \sum_{p=1}^{n}\frac{\partial \bar X_p}{\partial z}\frac{\partial^2 \bar{\bar z}}{\partial \bar X_p \partial \bar z}\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 \bar X_j}{\partial z^2}\frac{\partial \bar{\bar z}}{\partial \bar X_j} + \frac{\partial \bar X_j}{\partial z}\left(\frac{\partial \bar z}{\partial z}\frac{\partial^2 \bar{\bar z}}{\partial \bar z \bar X_j} + \sum_{p=1}^{n}\frac{\partial \bar X_p}{\partial z}\frac{\partial^2 \bar{\bar z}}{\partial \bar X_p \partial \bar X_j}\right)\right]$$

Les éléments

$$\frac{\partial^2 \bar z}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \bar{\bar z}}{\partial \bar z^2}, \frac{\partial \bar{\bar z}}{\partial \bar X_j}, \frac{\partial^2 \bar{\bar z}}{\partial \bar X_p \partial \bar z}, \frac{\partial^2 \bar{\bar z}}{\partial \bar z \bar X_j}, \frac{\partial^2 \bar{\bar z}}{\partial \bar X_p \partial \bar X_j}$$

sont dans $\mathcal{Q}_2$ donc chaque terme de cette somme est dans l'idéal $\mathcal{Q}_2\widehat{\otimes}\mathcal{O}_{J_2^*(M,M)} + \mathcal{O}_{J_2^*(M,M)}\widehat{\otimes}\mathcal{Q}_2$
Des calculs similaires montrent que

$$c^*\left(\frac{\partial^2 \bar z}{\partial z \partial X}\right), c^*\left(\frac{\partial^2 \bar z}{\partial X^2}\right) \in \mathcal{Q}_2\widehat{\otimes}\mathcal{O}_{J_2^*(M,M)} + \mathcal{O}_{J_2^*(M,M)}\widehat{\otimes}\mathcal{Q}_2$$

Condition *(ii)*
On rappelle que

$$e^*\left(E(y, \bar y, \frac{\partial \bar y}{\partial y}, \delta^{-1}, \frac{\partial^2 \bar y}{\partial y^2})\right) = E(y, y, Id_{n+1}, 1, 0)$$

On a donc

$$e^*\left(\frac{\partial \bar z}{\partial X}\right) = 0\,,\ e^*\left(\frac{\partial^2 \bar z}{\partial z \partial X}\right) = 0\,,\ e^*\left(\frac{\partial^2 \bar z}{\partial X^2}\right) = 0\,,\ e^*\left(\frac{\partial^2 \bar z}{\partial z^2}\right) = 0\,,\ e^*\left(z\frac{\partial \bar z}{\partial z} - \bar z\right) = z.1 - z = 0$$

et par conséquent, $e^*(\mathcal{Q}_2) = 0$.

Condition *(iii)*
On a d'abord $i^*(z, X) = (\bar z, \bar X)$ et $i^*(\bar z, \bar X) = (z, X)$,
et

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar z}{\partial \bar z} & \frac{\partial \bar z}{\partial \bar X_1} & \cdots & \frac{\partial \bar z}{\partial \bar X_n} \\ \frac{\partial \bar X_1}{\partial z} & & & \\ \vdots & & (\frac{\partial \bar X_i}{\partial X_j})_{i,j} & \\ \frac{\partial \bar X_n}{\partial z} & & & \end{pmatrix}^{-1} = \delta^{-1}\begin{pmatrix} \det(\frac{\partial \bar X_i}{\partial X_j})_{i,j} & *_1 & \cdots & *_n \\ \flat_1 & & & \\ \vdots & & B & \\ \flat_n & & & \end{pmatrix}$$

où les $*_j$ représentent des combinaison linéaires des $\frac{\partial \bar z}{\partial \bar X_1}, \ldots, \frac{\partial \bar z}{\partial \bar X_n}$ et la matrice B vérifie

$$\delta^{-1}(\flat_i\frac{\partial \bar z}{\partial X_j})_{i,j} + \delta^{-1}B(\frac{\partial \bar X_i}{\partial X_j})_{i,j} = Id_n$$

On a donc d'abord,

$$i^*(\frac{\partial \bar{z}}{\partial X_j}) = \delta^{-1} *_j \in \mathcal{Q}_2$$

Ensuite,

$$i^*(\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} z - \bar{z}) = \delta^{-1} \det(\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial X_j})_{i,j} \bar{z} - z$$

Or,

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} z - \bar{z} \in \mathcal{Q}_2 \text{ donc } \delta^{-1} \det(\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial X_j})_{i,j} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} z - \delta^{-1} \det(\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial X_j})_{i,j} \bar{z} \in \mathcal{Q}_2$$

Et donc

$$i^*(\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} z - \bar{z}) \equiv (\delta^{-1} \det(\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial X_j})_{i,j} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - 1) z \equiv -\delta^{-1} (\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_k} \flat_k) \equiv 0 \mod \mathcal{Q}_2$$

Dans le calcul préliminaire, on pose $g = f^{-1}$, et on obtient

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i} (\frac{\partial f_l^{-1}}{\partial x_j} \circ f) + \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_k} (\frac{\partial^2 f_l^{-1}}{\partial x_p \partial x_j} \circ f)$$

ce qui se récrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \end{pmatrix} \left(H(f_l^{-1}) \circ f\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_l^{-1}}{\partial x_0} \circ f & \cdots & \frac{\partial f_l^{-1}}{\partial x_n} \circ f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_i \partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_k} \end{pmatrix} := h_{i,k}^l$$

où $H(f_l^{-1})$ est la matrice hessienne de la composante f_l^{-1} dont les coefficient sont les $\frac{\partial^2 f_l^{-1}}{\partial x_p \partial x_j}$. Les coefficients $h_{i,k}^l$ sont donc les valeurs de la forme bilinéaire symétrique représentée par la matrice hessienne $H(f_l^{-1})$ en les éléments de la base formée des vecteurs colonnes de la matrice jacobienne $Jf = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)_{j,k}$. Par changement de base, on obtient donc :

$$\left(H(f_l^{-1}) \circ f\right) =^t (Jf)^{-1} \left(h_{i,k}^l\right)_{i,k} (Jf)^{-1}$$

On déduit de cette formule que $i^*(H\bar{z}) =$

$$-{}^t i^* \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X} \\ \frac{\partial \bar{X}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^* \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial z^2} \end{pmatrix} & i^* \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z \partial X} \\ \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial z \partial X} \end{pmatrix} \\ i^* \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z \partial X} \\ \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial z \partial X} \end{pmatrix} & i^* \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial X^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial X^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} i^* \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X} \\ \frac{\partial \bar{X}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} \end{pmatrix}$$

Les coefficients de la matrice du milieu sont dans $\mathcal{Q}_2$ parce que

$$i^* \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial X}\right), \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z \partial X}, \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial X^2} \in \mathcal{Q}_2$$

et donc $i^*(H\bar{z}) \in \mathcal{Q}_2$.

Remarque 1.2.27. L'exemple 1.2.7 a déjà permis de vérifier que l'ensemble $\widehat{sol}_2(\mathcal{Q}_2)$ des solutions formelles d'ordre 2 du système différentiel $\mathcal{Q}_2$ est un sous-groupoïde ensembliste de $|J_2^*(M, M)|$.

Remarque 1.2.28. D'après la proposition 1.2.26, le prolongement $pr_1\mathcal{Q}_2 = \langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial X}, z\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - \bar{z}, \partial^2\bar{z}, \partial^3\bar{z}\rangle$ est un groupoïde d'ordre 3 sur M.
Les conditions *(i)* et *(ii)* de la définition 1.2.23 peuvent aussi être vérifiées sur ces générateurs. Par contre, je ne suis pas arrivée à calculer les dérivées partielles troisièmes de l'inverse d'un 3-jet en fonction des coordonnées du 3-jet et donc, je ne suis pas arrivée à vérifier la condition *(iii)* directement sur les générateurs de $pr_1\mathcal{Q}_2$.

Exemple 2 : le sous-groupoïde fermé de $J_r^*(M,M)$ défini par $\ker e^*$

La condition *(ii)* de la définition 1.2.23 de groupoïde d'ordre r sur M est l'inclusion $\mathcal{G}_r \subset \ker e^*$. On va montrer que l'idéal $\ker e^*$ de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$, pour $r \in \mathbb{N}$, est un groupoïde d'ordre r sur M et calculer ses solutions. On a nécessairement l'inclusion $sol(\ker e^*) \subset sol(\mathcal{G}_r)$. Le groupoïde $\ker e^*$ est donc, du point de vue des solutions, le plus petit groupoïde d'ordre r sur M.

En utilisant la définition de $\ker e^*$ en tant que noyau d'un morphisme, on arrive à vérifier les conditions *(ii)* et *(iii)* de la définition 1.2.23 de groupoïde d'ordre r sur M, mais pas la condition *(i)*.
Aussi, on détermine un système de générateurs de $\ker e^*$. Ces générateurs permettent de montrer que $\ker e^*$ est un groupoïde d'ordre 0, et que les idéaux $\ker e^* \subset \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ sont les prolongements les uns des autres, ce qui permet d'utiliser la proposition 1.2.26 de Malgrange pour conclure.

Le calcul des générateurs de $\ker e^*$ est aussi l'occasion d'introduire une technique que l'on utilisera par la suite.

Lemme 1.2.29 (Théorème de préparation de Weierstrass, [**?**], p. 18-07)**.** *Soit $g \in \mathbb{C}\{x_1, \dots x_h\}$ une série convergente telle que $g(0,\dots,0,x_h) \neq 0$ dans $\mathbb{C}\{x_h\}$. Soit p l'ordre de $g(0,\dots,0,x_h)$.*
Pour tout $f \in \mathbb{C}\{x_1,\dots x_h\}$, il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{C}\{x_1,\dots x_h\} \times \mathbb{C}\{x_1,\dots x_{h-1}\}[x_h]$, avec r de degré $< p$ par rapport à x_h, tel que $f = gq + r$.
Par la suite, on qualifiera de division de Weierstrass le résultat donné par ce lemme.

Proposition 1.2.30. *Soit $r \in \mathbb{N}$. Le noyau $\ker e^*$ de $e^* : \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} \to e_*\mathcal{O}_M$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ engendré par les équations :*

$$y - \bar{y}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} - Id_{n+1}, \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r}$$

Démonstration. On note $\mathcal{E}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ engendré par les fonctions ci-dessus. On vérifie facilement que $e^*\mathcal{E} = 0$. On en déduit que $\mathcal{E}$ est un sous-faisceau de $\ker e^*$.

Réciproquement, soit (a,b) un point M^2 et soit $E(y, \bar{y}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \delta^{-1}, \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r})$ une équation de la fibre $(\ker e^*)_{(a,b)}$. On regarde E comme un élément de

$$\mathbb{C}\{y-a, \bar{y}-b\}[\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \delta^{-1}, \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r}]$$

On considère d'abord les équations E de $(\ker e^*)_{(a,b)}$ et $\frac{\partial^r \bar{y}_{i_0}}{\partial y^r_{j_0}}$ de $(\mathcal{E})_{(a,b)}$ comme des éléments de l'anneau de polynômes

$$\mathbb{C}\{y-a, \bar{y}-b\}[\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \delta^{-1}, \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^{r-1} \bar{y}}{\partial y^{r-1}}, \widehat{\frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r}}] \left[\frac{\partial^r \bar{y}_{i_0}}{\partial y^r_{j_0}}\right]$$

en l'indéterminée $\frac{\partial^r \bar{y}_{i_0}}{\partial y^r_{j_0}}$ (dans les coefficients, le symbole $\widehat{\frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r}}$ représente toutes les coordonnées $\frac{\partial^r \bar{y}_i}{\partial y^r_j}$ sauf $\frac{\partial^r \bar{y}_{i_0}}{\partial y^r_{j_0}}$).

On effectue dans cet anneau la division euclidienne de E par le polynôme unitaire $\frac{\partial^r \bar{y}_{i_0}}{\partial y^r_{j_0}}$ et l'on obtient une équation E_1 de $(\ker e^*)_{(a,b)}$ qui ne dépend pas de l'indéterminée $\frac{\partial^r \bar{y}_{i_0}}{\partial y^r_{j_0}}$ et telle que $E \equiv E_1 \mod \mathcal{E}_{(a,b)}$.
De façon analogue, par des divisions successives de E_1 (puis de ses restes) par les polynômes unitaires de degré 1 : $\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} - Id_{n+1}, \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial^r \bar{y}}{\partial y^r}$, on obtient une équation E_2 de $(\ker e^*)_{(a,b)}$ qui ne dépend (holomorphiquement) que de y et $\bar{y}$ et telle que $E \equiv E_2 \mod \mathcal{E}_{(a,b)}$.
Ensuite, la division de Weierstrass (donnée par le lemme 1.2.29) de E_2 par $\bar{y} - y$ définit une fonction $E_3 \in \mathbb{C}\{y-a\}$ de $(\ker e^*)_{(a,b)}$ telle que $E_2 \equiv E_3 \mod \mathcal{E}_{(a,b)}$.
Or, $E_3(y) = E_3 \circ e(y) = 0$ car $E_3 \in \ker e^*$. Donc E_3, et par conséquent E_2, E_1 puis E sont dans $\mathcal{E}$.
Les fibres des idéaux $\ker e^*$ et $\mathcal{E}$ coïncident, et donc $\ker e^* = \mathcal{E}$. □

Proposition 1.2.31. *L'idéal* $\ker e^*$ *de* $\mathcal{O}_{J^*_r(M,M)}$ *est un groupoïde d'ordre* r *sur* M*. Ses solutions formelles d'ordre* r *sont les* r*-jets de l'application identité de* M *et ses solutions formelles et convergentes sont les germes de l'application identité de* M*.*

Démonstration. On vérifie facilement que $\ker e^* \subset \mathcal{O}_{J^*_0(M,M)}$ est un groupoïde d'ordre 0 sur M. On a $c^*(y-\bar{y}) = y - \bar{\bar{y}} = (y-\bar{y}) + (\bar{y}-\bar{\bar{y}}) \in \ker e^* \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{J^*_r(M,M)} + \mathcal{O}_{J^*_r(M,M)} \widehat{\otimes} \ker e^*$, puis $e^*(y-\bar{y}) = y - y = 0$, et enfin $i^*(y-\bar{y}) = \bar{y} - y \in \ker e^*$.
On vérife également que les idéaux $\ker e^* \subset \mathcal{O}_{J^*_r(M,M)}$ sont les prolongements d'ordre r de l'idéal $\ker e^* \subset \mathcal{O}_{J^*_0(M,M)}$. On a $D(y-\bar{y}) = Id_{n+1} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}$ et $D^l(y-\bar{y}) = \frac{\partial^l \bar{y}}{\partial y^l}$, pour tout $l \geq 2$. Aussi, d'après la proposition 1.2.26 de Malgrange, les idéaux $\ker e^* \subset \mathcal{O}_{J^*_r(M,M)}$ sont des groupoïdes d'ordre r sur M.
On pourrait vérifer directement par le calcul, à partir du système de générateurs, que les idéaux $\ker e^*$ de $\mathcal{O}_{J^*_1(M,M)}$ et $\mathcal{O}_{J^*_2(M,M)}$ sont des groupoïdes d'ordre 2. Je n'arrive pas à faire le calcul direct à partir de l'ordre 3. On peut aussi vérifier les conditions *(ii)* et *(iii)* de la définition 1.2.23 sur l'idéal $\ker e^*$ de $\mathcal{O}_{J^*_r(M,M)}$, défini comme noyau du morphisme e^*. La condition *(ii)* est une tautologie. Ensuite, soit E une équation de $\ker e^*$. Alors $e^*(i^*E) = i^*E \circ e = (E \circ i) \circ e = E \circ (icirce) = E \circ e = e^*E = 0$ donc $i^*E \in \ker e^*$.
Le générateur $(y - \bar{y})$ de $\ker e^* \subset \mathcal{O}_{J^*_0(M,M)}$ donne immédiatement que les solutions formelles et convergentes du groupoïde $\ker e^*$ sont les germes de l'application identité de M. De plus, d'après les remarques 1.1.39 et 1.1.43, les groupoïdes $\ker e^* \subset \mathcal{O}_{J^*_r(M,M)}$, qui sont les prolongements de $\ker e^* \subset \mathcal{O}_{J^*_0(M,M)}$, ont les mêmes solutions formelles et convergentes que $\ker e^* \subset \mathcal{O}_{J^*_0(M,M)}$, c'est-à-dire les germes de l'application identité de M. On aurait aussi pu le calculer facilement à partir des générateurs.
Les générateurs de $\ker e^* \subset \mathcal{O}_{J^*_0(M,M)}$ donnent facilement les solutions formelles d'ordre r des groupoïdes $\ker e^*$. Ce sont les r-jets de l'application identité de M. □

1.2.3 Les D-groupoïdes

On définit enfin dans cette partie la notion de D-groupoïde de Malgrange, qui caractérise des idéaux différentiels dont les solutions sont des groupoïdes ensemblistes, et qui permet de prendre en compte des situations naturelles ne remplissant pas partout des conditions de régularité.

Les D-groupoïdes stricts

La définition de groupoïde d'ordre fini permet de donner une caractérisation naturelle des idéaux différentiels de $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}$ dont les solutions sont des groupoïdes ensemblistes. Ce sont les D-groupoïdes stricts, définis dans [**?**], p. 471.

Définition 1.2.32. *Un D-groupoïde strict sur M est la donnée d'un idéal pseudo-cohérent et différentiel $\mathcal{G}$ de $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}$ tel que pour tout entier r suffisamment grand, l'idéal $\mathcal{G}_r = \mathcal{G} \cap \mathcal{O}_{J^*_r(M,M)}$ est un groupoïde d'ordre r sur M.*

Exemple 1.2.33.
- L'idéal différentiel $\mathcal{Q}'$ est un D-groupoïde strict sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. En effet, d'après les calculs de l'exemple 1.1.37, les idéaux $\mathcal{Q}'_r = \mathcal{Q}' \cap \mathcal{O}_{J^*_r(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)} = \left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial X}, z\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - \bar{z}, \partial^2\bar{z}, \ldots, \partial^r\bar{z} \right\rangle$ sont les prolongements de l'idéal $\mathcal{Q}_2$, qui est un groupoïde d'ordre 2. D'après la proposition 1.2.26, ces prolongements sont encore des groupoïdes.
- L'idéal différentiel $\ker e^*$, union des groupoïdes $\ker e^* \subset \mathcal{O}_{J^*_r(M,M)}$, est un D-groupoïde strict.

Propriété 1.2.34. *Soit $\mathcal{G}$ un D-groupoïde strict sur M. L'ensemble $sol(\mathcal{G})$ des solutions convergentes de $\mathcal{G}$ est un sous-groupoïde ensembliste de $Aut(M)$ et l'ensemble $\widehat{sol}(\mathcal{G})$ des solutions formelles de $\mathcal{G}$ est un sous-groupoïde ensembliste de $|J^*(M,M)|$.*

Démonstration. Pour tout $r_0 \in \mathbb{N}$, on a $sol(\mathcal{G}) = \cap_{r\geq r_0} sol(\mathcal{G}_r)$, et $\widehat{sol}(\mathcal{G}) = \cap_{r\geq r_0}\widehat{sol}(\mathcal{G}_r)$. On choisit donc r_0 de sorte que pour tout $r \geq r_0$, les idéaux $\mathcal{G}_r = \mathcal{G} \cap \mathcal{O}_{J^*_r(M,M)}$ soient des groupoïdes d'ordre r. Aussi, d'après la propriété 1.2.25, les ensembles $sol(\mathcal{G}_r)$ et $\widehat{sol}(\mathcal{G}_r)$ sont, pour tout $r \geq r_0$, des groupoïdes ensemblistes, et d'après lea propriété 1.2.9, les intersections $sol(\mathcal{G}) = \cap_{r\geq r_0} sol(\mathcal{G}_r)$ et $\widehat{sol}(\mathcal{G}) = \cap_{r\geq r_0}\widehat{sol}(\mathcal{G}_r)$ sont encore des groupoïdes ensemblistes. □

Les D-groupoïdes

D'après [?], 2.3.2., la définition de D-groupoïde strict sur M est trop restrictive pour les besoins pratiques. La situation est la suivante : soit $\mathcal{G}_r$ un groupoïde d'ordre r sur M et soit $\mathcal{G}'$ l'idéal différentiel sur M engendré par $\mathcal{G}_r$, c'est-à-dire l'union de tous les prolongements de $\mathcal{G}_r$. Selon [?], 2.3.2., p. 472, il n'y a pas de raison pour que l'idéal $\mathcal{G}'$ soit un D-groupoïde strict sur M, c'est-à-dire pour que les idéaux $\mathcal{G}'_r$ soient en général des groupoïdes d'ordre r sur M.
Cependant, le théorème 1.2.38 ci-dessous assure que l'idéal $\mathcal{G}'$ définit un D-groupoïde sur M dans le sens suivant :

Définition 1.2.35. *Un D-groupoïde sur M est un idéal pseudo-cohérent, différentiel et réduit $\mathcal{G}$ de $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}$ tel que :*
(i) pour tout ouvert relativement compact U de M, il existe une sous-variété analytique complexe fermée Z de U de codimension ≥ 1 et un entier $r_0 \in \mathbb{N}$ tels que, au-dessus de $(U \setminus Z)^2$, et pour tout $r \geq r_0$, on ait

$$c^*\mathcal{G}_{r|(U\setminus Z)^2} \subset \mathcal{G}_{r|(U\setminus Z)^2} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{J^*_r(U\setminus Z, U\setminus Z)} + \mathcal{O}_{J^*_r(U\setminus Z, U\setminus Z)} \widehat{\otimes} \mathcal{G}_{r|(U\setminus Z)^2}$$

(ii) pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{G}_r \subset \ker e^*$$

(iii) pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$i^*\mathcal{G}_r \subset \mathcal{G}_r$$

Exemple 1.2.36.
- Les idéaux cohérents $\ker e^* \subset \mathcal{O}_{J^*_r(M,M)}$ sont réduits. En effet, soit E une équation d'une fibre $(\mathcal{O}_{J^*_r(M,M)})_{(a,b)}$ telle que $E^l \in (\ker e^*)_{(a,b)}$, pour un entier $l \in \mathbb{N}^*$. Alors, $0 = E^l \circ e = (E \circ e)^l$ dans l'anneau intègre $(\mathcal{O}_M)_a$, et donc $E \circ e = 0$, ce qui signifie exactement $E \in (\ker e^*)_{(a,b)}$.
L'idéal pseudo-cohérent, différentiel et réduit $\ker e^* \subset \mathcal{O}_{J^*(M,M)}$ est donc un D-groupoïde sur M. La condition *(ii)* de la définition 1.2.35 précédente assure que pour tout D-groupoïde $\mathcal{G}$ sur M, on a l'inclusion $sol(\ker e^*) \subset sol(\mathcal{G})$. Aussi, du point de vue des solutions, le D-groupoïde $\ker e^*$ est le plus petit D-groupoïde sur M.

- L'idéal $(0) \subset \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ est un D-groupoïde sur M. Pour tout D-groupoïde $\mathcal{G}$ sur M, on a $(0) \subset \mathcal{G}$ et donc $sol(\mathcal{G}) \subset sol((0)) = Aut(M)$. Aussi, du point de vue des solutions, le D-groupoïde (0) est donc le plus gros D-groupoïde sur M.

Propriété 1.2.37. *Soit $\mathcal{G}$ un D-groupoïde sur M. Alors, l'ensemble $sol(\mathcal{G})$ de ses solutions convergentes est un sous-groupoïde ensembliste de $Aut(M)$ et l'ensemble $\widehat{sol}(\mathcal{G})$ de ses solutions formelles est un sous-groupoïde ensembliste de $|J^*(M,M)|$.*

Démonstration. On va le montrer pour les solutions convergentes. Soient $f : V_1 \to V_2$ et $g : V_2 \to V_3$ deux difféomorphismes locaux de M dont les germes en tous les points de leurs ouverts de définition sont des solutions convergentes de $\mathcal{G}$. Soit U un ouvert relativement compact de M contenant les ouverts V_1, V_2 et V_3. Soient r_0 et Z comme dans la définition 1.2.35 précédente, de sorte que pour tout $r \geq r_0$, et en restriction à $(U \setminus Z)^2$, les idéaux $\mathcal{G}_r = \mathcal{G} \cap \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ sont des groupoïdes d'ordre r. Alors, d'après la propriété 1.2.25, pour toute équation $E \in \Gamma(V_1 \times V_3, \mathcal{G}_r)$, la fonction $y \mapsto E(y, g \circ f(y), \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(y), \ldots))$ est nulle sur $V_1 \setminus [Z \cup f^{-1}(Z) \cup (g \circ f)^{-1}(Z)]$. Or, cette fonction est définie partout sur V_1 et est holomorphe, donc, d'après le théorème du prolongement analytique, elle est nulle partout sur V_1. Aussi, les germes en tous les points de V_1 du difféomorphisme local $g \circ f : V_1 \to V_3$ sont des solutions convergentes de $\mathcal{G}$. □

Le théorème qui suit décrit la situation naturelle que la définition de D-groupoïde de Malgrange permet de prendre en compte, à savoir, que tout groupoïde d'ordre fini engendre un D-groupoïde.

Théorème 1.2.38 (Malgrange, [**?**], théorème 4.4.1., p.487)**.** *Soit $\mathcal{G}_r$ un groupoïde d'ordre r sur M. Alors :*
- la racine $\sqrt{\mathcal{G}'}$ du système différentiel engendré par $\mathcal{G}_r$, est un D-groupoïde sur M que l'on appellera D-groupoïde sur M engendré par $\mathcal{G}_r$,
- pour tout ouvert relativement compact U de M, il existe un sous-ensemble analytique fermé Z de U de codimension ≥ 1 tel que, sur $(U \setminus Z)^2$, le système différentiel $\mathcal{G}'_{|(U \setminus Z)^2}$ est réduit, c'est-à-dire $\sqrt{\mathcal{G}'_{|(U \setminus Z)^2}} = \mathcal{G}'_{|(U \setminus Z)^2}$.

Démonstration. La preuve de ce théorème est dans [**?**], 4.4. □

Exemple 1.2.39. Le D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ engendré par le groupoïde $\mathcal{Q}_2$ d'ordre 2 est l'idéal $\sqrt{\mathcal{Q}'}$. De plus, pour tout ouvert relativement compact U de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, il existe un sous-ensemble analytique fermé Z de U de codimension ≥ 1 tel que, sur $(U \setminus Z)^2$, l'idéal $\mathcal{Q}'$ est réduit.

Le théorème de structure suivant assure que réciproquement, tout D-groupoïde provient de la situation considérée dans le théorème 1.2.38 précédent, c'est-à-dire que pour tout ouvert relativement compact U de M, et en dehors d'une sous-variété analytique complexe fermée Z de U de codimension ≥ 1, la restriction de tout D-groupoïde est le système différentiel réduit engendré par un groupoïde d'ordre fini involutif.

Théorème 1.2.40 (Malgrange, [**?**], théorème 4.3.1., p.484)**.** *Soit $\mathcal{G}$ un D-groupoïde sur M et soit U un ouvert relativement compact de M. Alors, il existe un entier $r \geq 1$ et un sous-ensemble analytique fermé de U de codimension ≥ 1 tels que, sur $(U \setminus Z)^2$:*
- l'idéal $\mathcal{G}_{r|(U \setminus Z)^2}$ est un groupoïde d'ordre r et est r-involutif,
- pour tout $s \geq 1$, l'idéal $\mathcal{G}_{(r+s)|(U \setminus Z)^2}$ est le prolongement d'ordre s de $\mathcal{G}_{r|(U \setminus Z)^2}$ et donc

$$\mathcal{G}_{|(U \setminus Z)^2} = \bigcup_{s \geq 0} pr_s \, \mathcal{G}_{r|(U \setminus Z)^2}$$

Démonstration. La preuve de ce théorème est dans [**?**], 4.3. □

Pour finir, on énonce le théorème qui va permettre de définir une D-enveloppe, au sens des D-groupoïdes, pour un sous-groupoïde ensembliste de $Aut(M)$.

Théorème 1.2.41 (Malgrange, [?], théorème 4.5.1., p.489)**.** *Pour une famille quelconque $\{\mathcal{G}^j; j \in J\}$ de D-groupoïdes sur M , l'idéal $\sqrt{\sum \mathcal{G}^j}$ est un D-groupoïde sur M que l'on appellera « intersection des D-groupoïdes $\mathcal{G}^j$ ».*

Définition 1.2.42. *Soit G un sous-groupoïde ensembliste de $Aut(M)$. On appellera D-enveloppe de G l'intersection des D-groupoïdes sur M qui contiennent G parmi leurs solutions.*

Dans le théorème 1.2.41, la terminologie « intersection des $\mathcal{G}^j$ » vient du fait que pour tout $j \in J$, on a l'égalité $sol(\sqrt{\sum \mathcal{G}^j}) = (\cap_{j\in J} sol(\mathcal{G}^j))$. Cette « intersection » est donc à considérer du point de vue des solutions.

Tout du long de ce travail, on rencontrera un problème de terminologie similaire quand il s'agira de comparer des D-groupoïdes.
J'ai fait le choix, dans la définition 1.2.35, de désigner les D-groupoïdes par les idéaux d'équations qui les définissent. Par contre, en suivant l'exemple du théorème 1.2.41, je choisis d'utiliser une terminologie à interpréter du point de vue des solutions pour comparer les D-groupoïdes.
Je la précise dans la définition qui suit.

Définition 1.2.43.
- Soit $\{\mathcal{G}^j; j \in J\}$ une famille de D-groupoïdes sur M. J'appellerai « intersection des D-groupoïdes $\mathcal{G}^j$ », le D-groupoïde $\sqrt{\sum \mathcal{G}^j}$.
Du point de vue des solutions, on a bien :

$$sol(\sqrt{\sum \mathcal{G}^j}) = \bigcap_{j\in J} sol(\mathcal{G}^j)$$

- Soit G un sous-groupoïde ensembliste de $Aut(M)$. J'appellerai « plus petit D-groupoïde sur M contenant G parmi ses solutions », la D-enveloppe de G.
Du point de vue des solutions, on a bien :

$$G \subset \bigcap_{\mathcal{G}\,:\, G\subset sol(\mathcal{G})} sol(\mathcal{G})$$

- Soit $\mathcal{G}$ un D-groupoïde sur M. J'appellerai « majorant de $\mathcal{G}$ », un D-groupoïde $\mathcal{H}$ sur M tel que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$.
Du point de vue des solutions, on a bien :

$$sol(\mathcal{G}) \subset sol(\mathcal{H})$$

- Soit $\mathcal{G}$ un D-groupoïde sur M. J'appellerai « D-sous-groupoïde de $\mathcal{G}$ », un D-groupoïde $\mathcal{H}$ sur M tel que $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$.
Du point de vue des solutions, on a bien :

$$sol(\mathcal{H}) \subset sol(\mathcal{G})$$

L'exemple qui suit est artificiel. Il a seulement pour but d'illustrer ces définitions 1.2.43, qui sont importantes pour la suite. Des exemples plus significatifs, et fondamentaux, apparaîtront dans les chapitres suivants.

Exemple 1.2.44. On a les inclusions suivantes de D-groupoïdes sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$:

$$(0) \subset \sqrt{\mathcal{Q}'} \subset \ker e^*$$

et les inclusions suivantes de groupoïdes ensemblistes de solutions :

$$\begin{array}{ccccc} & sol(\ker e^*) & \subset & sol(\sqrt{\mathcal{Q}'}) & \subset & sol(0) \\ \Leftrightarrow & & & & & \\ & \{(z,X)\mapsto(z,X)\} & \subset & \{(z,X)\mapsto(\alpha z, F(z,X))\} & \subset & Aut(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n) \end{array}$$

Aussi :
- Le D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{Q}'}$ est l' intersection des D-groupoïdes (0) et $\sqrt{\mathcal{Q}'}$. Le D-groupoïde $\ker e^*$ est l' intersection des D-groupoïdes $\sqrt{\mathcal{Q}'}$ et $\ker e^*$.
- Le D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{Q}'}$ est le plus petit D-groupoïde sur M contenant les germes de difféomorphismes locaux de la forme $(z,X)\mapsto(\alpha z, F(z,X)$, avec $\alpha\in\mathbb{C}^*$ et F quelconque, parmi ses solutions.
- Le D-groupoïde (0) est un majorant du D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{Q}'}$ et du D-groupoïde $\ker e^*$. Le D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{Q}'}$ est un majorant du D-groupoïde $\ker e^*$.
- Le D-groupoïde $\ker e^*$ est un D-sous-groupoïde du D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{Q}'}$ et du D-groupoïde (0). Le D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{Q}'}$ est un D-sous-groupoïde du D-groupoïde (0).

Chapitre 2

Un D-groupoïde de Galois pour les équations aux q-différences

La notion de D-groupoïde présentée dans le chapitre précédent a été introduite par Malgrange dans [**?**] afin de définir, pour les équations différentielles non linéaires, un objet qui généralise le groupe de Galois différentiel des équations différentielles linéaires.

On considère par exemple un système différentiel $X' = F(z, X)$ défini sur $P^1\mathbb{C}$, de taille n et *a priori* non linéaire et singulier. On considère ensuite le feuilletage singulier associé. On considère enfin le groupoïde d'holonomie de ce feuilletage, c'est-à-dire le groupoïde des germes de difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ qui laissent globalement invariante chaque feuille du feuilletage, c'est-à-dire, essentiellement, chaque solution de l'équation.
On peut alors estimer que le D-groupoïde de Galois du système différentiel $X' = F(z, X)$ est la D-enveloppe du groupoïde d'holonomie, c'est-à-dire le plus petit D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ contenant les transformations d'holonomie parmi ses solutions.
Ce D-groupoïde est défini sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ et n'évite donc pas les singularités du feuilletage.

Malgrange justifie cette définition en montrant que le D-groupoïde de Galois d'un système différentiel linéaire redonne la définition tannakienne du groupe de Galois différentiel.

Cette construction n'est pas spécifique aux systèmes différentiels et peut être adaptée à des systèmes dynamiques de nature différente.
Par exemple, dans [**?**], Casale définit le D-groupoïde de Galois d'un germe de difféomorphisme local g de $(\mathbb{C}, 0)$ comme la D-enveloppe, sur un petit disque Δ centré en 0, du groupoïde ensembliste de germes de difféomorphismes locaux de Δ engendré par g.

Nous définissons ici un D-groupoïde de Galois pour les systèmes aux q-différences. Il s'agit donc de proposer, pour les équations aux q-différences, un groupoïde ensembliste qui représente la dynamique du système, puis de considérer la D-enveloppe de cette dynamique.
L'objet des chapitres suivants sera de justifier cette construction en étudiant ce D-groupoïde de Galois pour des systèmes aux q-différences linéaires, et de le comparer au groupe de Galois linéaire défini par dualité tannakienne dans [**?**].

Dans une première partie de ce chapitre, on propose une brève introduction aux équations aux q-différences, en suivant le point de vue de [**?**] et [**?**]. On évoquera la notion de solution pour ces équations fonctionnnelles, de façon à mettre en évidence leur dynamique particulière, qui est discrète et inversible.

On définira alors un groupoïde ensembliste qui représente la dynamique d'un système aux q-différences, éventuellement non linéaire, puis on définira le D-groupoïde de Galois d'un tel système comme la D-enveloppe de cette dynamique. On calculera ces deux objets pour les équations aux q-différences élémentaires.

Pour la suite, on fixe un nombre complexe $q \in \mathbb{C}^*$, tel que $|q| > 1$, et l'on désignera par n un entier naturel non nul.

2.1 Les équations aux q-différences linéaires

Les équations aux q-différences sont des équations fonctionnelles du champ analytique complexe. Elles sont définies à l'aide de l'homographie $z \mapsto qz$, qui agit de façon discrète et inversible sur la coordonnée complexe, et que l'on considère comme un opérateur sur les fonctions de la variable complexe, dans le sens : $f(z) \mapsto f(qz)$.

On propose ici une introduction à la théorie des équations aux q-différences linéaires, à travers la notion de solution. Le but est de mettre en évidence ce qu'un système aux q-différences linéaire rationnel impose, en tant qu'équation fonctionnelle, à ses solutions. On espère ainsi rendre un peu compte de la dynamique[1] de ces équations.
On suivra le point de vue de Sauloy dans [?] et [?], qui choisit de résoudre les systèmes aux q-différences avec des fonctions uniformes.

Cette introduction a également pour but de montrer les différences de la théorie des équations aux q-différences par rapport à celle des équations différentielles.

On notera $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{M}$) le faisceau sur $P^1\mathbb{C}$ des fonctions holomorphes (resp. méromorphes) sur la variété analytique complexe $P^1\mathbb{C}$.

2.1.1 Equations et systèmes

On note σ_q l'homographie $z \mapsto qz$ de $P^1\mathbb{C}$. On la considère comme un opérateur sur les fonctions de la variable complexe, dans le sens :

$$\sigma_q : f(z) \mapsto f(qz)$$

Une équation aux q-différences linéaire rationnelle d'ordre n est une équation fonctionnelle de la forme

$$\sigma_q^n f + a_1.\sigma_q^{n-1} f + \cdots + a_{n-1}.\sigma_q f + a_n.f = 0$$

ce qui s'écrit encore

$$f(q^n z) + a_1(z) f(q^{n-1} z) + \cdots + a_{n-1}(z) f(qz) + a_0(z) f(z) = 0$$

avec $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}(z)$.
Par vectorialisation (*cf* [?] p.1067), toute équation aux q-différences linéaire rationnelle d'ordre n définit un système aux q-différences linéaire rationnel de rang n, c'est-à-dire un système fonctionnel de la forme :

$$\sigma_q X = AX$$

ce qui s'écrit encore :

$$X(qz) = A(z)X(z)$$

avec $A \in GL_n(\mathbb{C}(z))$.

[1] Dans le langage courant, l'adjectif *dynamique* qualifie ce qui est relatif aux forces, et aux mouvements qu'elles engendrent. Le nom commun *dynamique* désigne la partie de la mécanique qui étudie les mouvements, en relation avec les forces qui les produisent.

Définition 2.1.1. *On dit que deux systèmes aux q-différences linéaires rationnels $\sigma_q X = AX$, avec $A \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, et $\sigma_q Y = BY$, avec $B \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, sont (rationnellement) équivalents, s'il existe une matrice $F \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, que l'on appellera transformation de jauge (rationnelle) de A vers B, telle que :*

$$B = (\sigma_q F)AF^{-1}$$

ce qui s'écrit encore :

$$B(z) = F(qz)A(z)(F(z))^{-1}$$

Cela revient à faire le changement de fonction inconnue $Y = F(z)X$.
Tout système aux q-différences linéaire rationnel est équivalent à un système aux q-différences obtenu par vectorialisation d'une équation aux q-différences linéaire rationnnelle. Une preuve adaptée de [**?**] est proposée dans [**?**] p. 1068.

Aussi, on ne travaillera que sur des systèmes aux q-différences, qui sont d'usage plus commode que les équations pour la théorie exposée ici.

Remarque 2.1.2. La coordonnée z utilisée ci-dessus pour définir les équations et les systèmes aux q-différences est la coordonnée globale sur $P^1\mathbb{C}$ introduite dans la notation 1.1.4. On rappelle qu'elle représente les points de l'ouvert $\mathbb{C} = \mathbb{C}_0$ (défini dans l'exemple 1.1.3) et prend la valeur ∞ pour représenter le point $(1:0) \in P^1\mathbb{C}$.
On note w la coordonnée globale sur $P^1\mathbb{C}$ définie par $w = \frac{1}{z}$. Elle représente les points de l'ouvert $\mathbb{C}_\infty$ (défini dans l'exemple 1.1.3) et prend la valeur ∞ pour représenter le point $(0:1) \in P^1\mathbb{C}$.
Un système aux q-différences linéaire rationnel $X(qz) = A(z)X(z)$, avec $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, peut être défini en fonction de la coordonnée w. En notant $Y(w) = X(\frac{1}{w}) = X(z)$, on a l'équivalence suivante :

$$X(qz) = A(z)X(z) \;\Leftrightarrow\; Y(qw) = A(\frac{1}{qw})^{-1}Y(w)$$

2.1.2 L'homographie $\sigma_q : z \mapsto qz$

L'homographie $\sigma_q : z \mapsto qz$ agit de façon discrète et inversible sur la coordonnée complexe. Elle fixe les points 0 et ∞ et engendre, à partir d'un point a de $\mathbb{C}^*$, une q-spirale logarithmique discrète de la forme $aq^{\mathbb{Z}}$, qui s'accumule en 0 et ∞.

Dans cette partie, on va montrer que pour les systèmes aux q-différences, il n'y a pas de notion naturelle de solution, au voisinage d'un point de $\mathbb{C}^*$, qui soit significative.
Les parties suivantes seront consacrées à la notion de solution au voisinage des points 0 et ∞.

On considère donc un système aux q-différences linéaire rationnel $\sigma_q X = AX$, avec $A \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, et un point $a \in \mathbb{C}^*$.

Les ouverts « q-invariants » de $P^1\mathbb{C}$

Si une fonction $f(z)$ est définie sur un ouvert U de $P^1\mathbb{C}$, la fonction $\sigma_q f(z) = f(qz)$ est définie sur l'ouvert $q^{-1}U$ de $P^1\mathbb{C}$. Aussi, la notion de solution pour $X(qz) = A(z)X(z)$ se définit naturellement sur des ouverts de $P^1\mathbb{C}$ invariants, au moins partiellement, par l'action de σ_q.

On dira qu'un ouvert U de $P^1\mathbb{C}$ est q-invariant s'il est invariant par les applications σ_q et σ_q^{-1}, c'est-à-dire si l'on a $qU \subset U$ et $q^{-1}U \subset U$.

Voici une liste d'ouverts q-invariants de $P^1\mathbb{C}$ qui interviendront par la suite :
- les ouverts $P^1\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^*$ sont q-invariants,

- pour un ouvert U de la couronne fondamentale $\{z \in \mathbb{C}^* ; 1 < |z| < |q|\}$, l'ouvert $q^{\mathbb{Z}}U = \cup_{k\in\mathbb{Z}} q^k U$ est un ouvert q-invariant de $P^1\mathbb{C}$. De plus, on a $U \cap q^k U = \emptyset$, pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

- un disque ouvert U centré en 0 est invariant par l'action de σ_q^{-1}, c'est-à-dire que l'on a $q^{-1}U \subset U$. L'ouvert $\mathbb{C} = \mathbb{C}_0$ de $P^1\mathbb{C}$ est le seul voisinage ouvert de 0, autre que $P^1\mathbb{C}$, qui est q-invariant.

- un disque ouvert U centré en ∞ est invariant par l'action de σ_q, c'est-à-dire que l'on a $q\,U \subset U$. L'ouvert $\mathbb{C}_\infty$ de $P^1\mathbb{C}$ est le seul voisinage ouvert de ∞, autre que $P^1\mathbb{C}$, qui est q-invariant.

Aussi, pour $\sigma_q X = AX$, il n'y a pas de notion naturelle de solution, sur un voisinage ouvert quelconque du point $a \in \mathbb{C}^*$. Il faut se placer sur un voisinage ouvert qui est q-invariant.

Solutions sur de « petits » ouverts q-invariants de $\mathbb{C}^*$

Nous allons montrer qu'il est facile de construire des matrices fondamentales de solutions méromorphes pour $\sigma_q X = AX$, sur de « petits » ouverts q-invariants de $\mathbb{C}^*$.

Pour cela, on considère un voisinage ouvert U du point a dans $\mathbb{C}^*$, tel que $U \cap q^k U = \emptyset$, pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire un ouvert U de $\mathbb{C}^*$ contenant le point a, et homéomorphe à son image dans $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$. C'est par exemple le cas d'une couronne ouverte contenant le point a, et de la forme $\{z \in \mathbb{C}^* ; r < |z| < R\}$, avec $r > 0$ et $\frac{R}{r} \leq |q|$.
Alors, l'ouvert $q^{\mathbb{Z}}U$ est un « petit » voisinage ouvert q-invariant de a dans $\mathbb{C}^*$.

On considère ensuite une matrice $\mathcal{X} \in GL_n(\mathcal{M}(U))$ quelconque. L'équation fonctionnelle $X(qz) = A(z)X(z)$ permet de prolonger méromorphiquement $\mathcal{X}$ à $q^{\mathbb{Z}}U$. Le prolongement, noté $\widetilde{\mathcal{X}}$, est donné, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, par $\widetilde{\mathcal{X}}(q^k z) = A_k(z)\mathcal{X}(z)$, où l'on note

$$A_k(z) = \begin{cases} Id_n & \text{si } k = 0 \\ \prod_{i=0}^{k-1} A(q^i z) & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \\ \prod_{i=k}^{-1} A(q^i z)^{-1} & \text{si } k \in -\mathbb{N}^* \end{cases}$$

On a par exemple $\widetilde{\mathcal{X}}(q^2 z) = A(qz)A(z)\mathcal{X}(z)$, ce qui définit $\widetilde{\mathcal{X}}$ sur l'ouvert q^2U.

On obtient ainsi une matrice $\widetilde{\mathcal{X}} \in GL_n(\mathcal{M}(q^{\mathbb{Z}}U))$, telle que $\widetilde{\mathcal{X}}(qz) = A(z)\widetilde{\mathcal{X}}(z)$ dans $GL_n(\mathcal{M}(q^{\mathbb{Z}}U))$. C'est donc une matrice fondamentale de solutions méromorphes sur l'ouvert q-invariant $q^{\mathbb{Z}}U$.

Aussi, il y a autant de solutions méromorphes sur $q^{\mathbb{Z}}U$ pour $\sigma_q X = AX$, que d'éléments dans $\mathcal{M}(U)^n$. La notion de solution méromorphe sur un tel ouvert n'est donc pas significative.

2.1.3 Les systèmes aux q-différences réguliers

La régularité d'un système aux q-différences linéaire rationnel est une notion locale attachée aux points 0 ou ∞. On va définir la notion de système régulier en 0. La remarque 2.1.2 permet d'adapter ce qui suit au point ∞.

Définition 2.1.3. *Un système aux q-différences linéaire rationnel $\sigma_q X = AX$, avec $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, est dit régulier en 0 si 0 n'est pas un pôle de $A(z)$ et $A(0) = I_n$.*

On considère un système aux q-différences linéaire rationnel $\sigma_q X = AX$, avec $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, qui est régulier en 0. On note $S(A)$ le lieu singulier[2] de la matrice A, c'est-à-dire l'ensemble formé

[2] Le lieu singulier $S(A)$ est attaché à la matrice A considérée *avec son inverse* comme un élément de $GL_n(\mathbb{C}(z))$. On verra dans la suite de cette introduction, que de ce lieu dépend la dynamique du système aux q-différences linéaire $\sigma_q X = AX$ défini par la matrice A.

des pôles de A et des pôles de A^{-1} (qui est égal à l'ensemble formé des pôles de A et des zéros du déterminant de A).
On va montrer que l'hypothèse de régularité en 0 permet de définir, pour $\sigma_q X = AX$, un système fondamental de solutions holomorphes sur un voisinage de 0, et que ce système se prolonge méromorphiquement sur « le » voisinage ouvert q-invariant $\mathbb{C}_0$ de 0 tout entier.

On considère le produit formel $\widehat{\mathcal{X}}(z) = \prod_{i\geq 1} A(q^{-i}z)$. Ce produit vérifie la relation

$$\widehat{\mathcal{X}}(qz) = \prod_{i\geq 1} A(q^{-i+1}z) = A(z)\prod_{i\geq 1} A(q^{-i}z) = A(z)\widehat{\mathcal{X}}(z)$$

L'hypothèse $A(0) = I_n$ assure que le produit $\prod_{i\geq 1} A(q^{-i}z)$ est convergent en 0. Il définit donc une matrice fondamentale de solutions convergentes en 0, pour $\sigma_q X = AX$, que l'on note $\mathcal{X}(z) = \prod_{i\geq 1} A(q^{-i}z) \in GL_n(\mathbb{C}\{z\})$.

On a $\mathcal{X}(0) = I_n$. Aussi, il existe un disque ouvert U centré en 0 sur lequel on a $\prod_{i\geq 1} A(q^{-i}z) \in GL_n(\mathcal{O}(U))$. On note encore $\mathcal{X}(z) = \prod_{i\geq 1} A(q^{-i}z) \in GL_n(\mathcal{O}(U))$.
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ fixé. Alors, comme $|q| > 1$, pour tout entier $k >> 1$, on a $q^{-k}z_0 \in U$. On a donc, au voisinage de z_0,

$$\widehat{\mathcal{X}}(z) = \prod_{i\geq 1} A(q^{-i}z) = \prod_{i=1}^{k-1} A(q^{-i}z)\prod_{i\geq 1} A(q^{-i}q^{-k}z) = (\prod_{i=1}^{k-1} A(q^{-i}z))\mathcal{X}(z)$$

Aussi, le produit $\prod_{i\geq 1} A(q^{-i}z)$ définit une matrice fondamentale de solutions méromorphes au voisinage de z_0, et donc sur $\mathbb{C}$ tout entier. On note $\widetilde{\mathcal{X}}(z) = \prod_{i\geq 1} A(q^{-i}z) \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$.

De plus, comme la relation $\widehat{\mathcal{X}}(z) = (\prod_{i=1}^{k-1} A(q^{-i}z))\mathcal{X}(z)$ a lieu pour tout entier $k >> 1$, le lieu singulier de la matrice $\widetilde{\mathcal{X}}$, c'est-à-dire le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ formé des pôles de $\widetilde{\mathcal{X}}$ et des pôles de $\widetilde{\mathcal{X}}^{-1}$, est, s'il n'y a pas de compensation, $S(\widetilde{\mathcal{X}}) = q^{\mathbb{N}^*}S(A)$. On conviendra que $S(\widetilde{\mathcal{X}}) = q^{\mathbb{N}^*}S(A)$, avec possibilité de singularités apparentes.

Indépendamment de 0 et ∞, le lieu $q^{\mathbb{N}^*}S(A)$ est formé de l'union de q-demi-spirales logarithmiques discrètes engendrées par les points de $S(A)\cap\mathbb{C}^*$, et qui s'accumulent en ∞. Aussi, d'après le principe des zéros isolés, la matrice fondamentale de solutions $\mathcal{X} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ ne se prolonge en général pas méromorphiquement à $P^1\mathbb{C}$ tout entier.

On vient de montrer qu'un système aux q-différences régulier en 0 admet une matrice fondamentale de solutions holomorphes en 0, qui se prolonge méromorphiquement au voisinage ouvert q-invariant $\mathbb{C}_0$ de 0 tout entier.[3]
A priori, ces solutions n'admettent pas de prolongement méromorphe en ∞. Cela confirme le caractère local de la notion de régularité pour un système aux q-différences.[4]

2.1.4 Les systèmes aux q-différences fuchsiens

Comme la régularité, la qualité fuchsienne d'un système aux q-différences linéaire rationnel est une notion locale attachée aux points 0 ou ∞. On va définir la notion de système fuchsien en 0. La remarque 2.1.2 permet d'adapter ce qui suit au point ∞.

[3] Il n'y a pas, dans le prolongement, de phénomène de monodromie. Le prolongement est uniforme. Par contre, il n'est pas holomorphe, il est nécessaire d'accepter des q-demi-spirales de singularités qui s'accumulent en ∞.

[4] On remarque déjà ici un phénomène propre aux équations aux q-différences : le caractère local d'une propriété (*a priori* attachée à un « petit » voisinage de 0) se propage automatiquement au voisinage ouvert q-invariant $\mathbb{C}_0$ de 0 tout entier. L'ouvert q-invariant $\mathbb{C}_0$ a, pour les équations aux q-différences, un caractère local.

Définition 2.1.4. *Un système aux q-différences linéaire rationnel* $\sigma_q X = AX$, *avec* $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, *est dit fuchsien en* 0 *s'il existe une matrice constante* $A^{(0)} \in GL_n(\mathbb{C})$ *et une matrice* $F^{(0)} \in GL_n(\mathbb{C}(\{z\}))$, *que l'on appellera transformation de jauge (méromorphe) locale de* A *vers* $A^{(0)}$, *telles que :*

$$A^{(0)} = (\sigma_q F^{(0)}) A (F^{(0)})^{-1}$$

ce qui s'écrit encore

$$A^{(0)} = F^{(0)}(qz) A(z) (F^{(0)}(z))^{-1}$$

Remarque 2.1.5. L'équation fonctionnelle $F^{(0)}(qz) = A^{(0)} F^{(0)}(z) A(z)^{-1}$ vérifiée dans $GL_n(\mathbb{C}(\{z\}))$ par la transformation de jauge locale $F^{(0)}$, permet de prolonger méromorphiquement $F^{(0)}$ à $\mathbb{C}$ tout entier. Pour cela, on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$F^{(0)}(q^k z) = A^{(0)} F^{(0)}(z) A_k(z)^{-1}$$

toujours avec $A_k(z) = \prod_{i=0}^{k-1} A(q^{-i} z)$.
Le prolongement $F^{(0)} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ vérifie encore, dans $GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$, l'équation fonctionnelle $A^{(0)} = (\sigma_q F^{(0)}) A (F^{(0)})^{-1}$ dans $GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$.
Aussi, il est équivalent, dans l'énoncé de la définition 2.1.4 précédente, de demander une transformation de jauge locale $F^{(0)}$ dans $GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$.[5] C'est l'usage que l'on adoptera par la suite.

Remarque 2.1.6. L'équation fonctionnelle $F^{(0)}(qz) = A^{(0)} F^{(0)}(z) A(z)^{-1}$ montre que, indépendamment de 0, le lieu singulier de la matrice $F^{(0)} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ est $q^{\mathbb{N}^*} S(A)$, avec possibilité de singularités apparentes, c'est-à-dire une union (finie) de q-demi-spirales logarithmiques discrètes qui s'accumulent en ∞. Aussi, la tranformation de jauge $F^{(0)} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ ne se prolonge *a priori* pas méromorphiquement à $P^1\mathbb{C}$ tout entier. Le caractère fuchsien d'un système aux q-différences est donc bien une notion locale.

Il n'existe pas nécessairement de solution holomorphe, ou même méromorphe, au voisinage de 0 ou de ∞ pour un système aux q-différences $\sigma_q X = AX$. On peut par exemple vérifier qu'il n'existe de série de Laurent convergente en 0 solution de $\sigma_q x = ax$, avec $a \in \mathbb{C}^*$, que si $a \in q^{\mathbb{Z}}$.[6] Plus généralement, on peut vérifier qu'un système aux q-différences fuchsien en 0 n'admet de solution holomorphe ou méromorphe en 0, que s'il est localement équivalent à un système aux q-différences régulier en 0 (c'est-à-dire s'il existe une transformation de jauge locale $F^{(0)} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ telle que l'on puisse avoir $A^{(0]} = I_n$).

Une méthode analogue à la méthode de Frobenius de résolution locale des systèmes différentiels linéaires à singularités fuchsiennes est développée par Sauloy dans [**?**] et [**?**] pour les systèmes aux q-différences. Elle permet de construire des matrices fondamentales de solutions locales, à coefficients dans $\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$, pour les systèmes aux q-différences fuchsiens.

On rappelle ici les éléments fondamentaux sur lesquels cette méthode est basée.

La q-analogie suivie

L'analogie suivie dans [**?**] et [**?**] entre les systèmes différentiels et les systèmes aux q-différences est donnée par la mise en parallèle des opérateurs

$$z\frac{\partial}{\partial z} \longleftrightarrow \frac{\sigma_q - 1}{q - 1}$$

[5] Ici encore, on remarque que, pour un système aux q-différences linéaire, la propriété locale en 0 d'être fuchsien s'étend naturellement au voisinage ouvert q-invariant $\mathbb{C}_0$ de 0 tout entier.

[6] Si $a = q^l$, avec $l \in \mathbb{Z}$, le système aux q-différences $\sigma_q x = ax$ est rationnellement équivalent, via la transformation de jauge z^l de 1 vers q^l, au système aux q-différences $\sigma_q x = x$, qui est régulier en 0.

Cette analogie est notamment justifiée par l'exemple des séries hypergéométriques basiques rappelé dans [**?**] puis [**?**].

En particulier, on a l'analogie

$$z\frac{\partial}{\partial z}X = 0 \longleftrightarrow \sigma_q X = X$$

qui justifie la définition 2.1.3 de système aux q-différences régulier,
et l'analogie

$$z\frac{\partial X}{\partial z} = AX \longleftrightarrow \sigma_q X = ((q-1)A + I_n)X$$

avec $A \in M_n(\mathbb{C})$, qui justifie la définition 2.1.4 de système aux q-différences fuchsien.

Les « briques de base »

Selon l'analogie suivie, les q-analogues des équations différentielles des caractères et du logarithme sont les équations aux q-différences

$$\sigma_q x = ax, \text{ avec } a \in \mathbb{C}^*, \text{ et } \sigma_q x = x + 1$$

Des solutions de ces équations sont construites à partir d'une version multiplicative de la fonction theta de Jacobi, à savoir la fonction

$$\theta_q(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{-n(n-1)}{2}} z^n$$

Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$\theta_q(qz) = -qz\theta_q(z)$$

D'après la formule du triple produit de Jacobi (*cf* [**?**] ou [**?**]), ses singularités sont exactement les points de la q-spirale $q^{\mathbb{Z}}$, qui sont des zéros simples.

Une solution privilégiée dans [**?**] et [**?**] de l'équation des q-caractères $\sigma_q x = ax$ d'exposant $a \in \mathbb{C}^*$ est la fonction

$$e_{q,a}(z) = \frac{\theta_q(z)}{\theta_q(a^{-1}z)}$$

Elle est méromorphe sur $\mathbb{C}^*$. Si $a \notin q^{\mathbb{Z}}$, ses pôles (simples) sont les points de la q-spirale $aq^{\mathbb{Z}}$, et ses zéros (simples) sont les points de la q-spirale $q^{\mathbb{Z}}$. Sinon, si $a = q^n$, avec $n \in \mathbb{Z}$, la solution $e_{q,a}(z)$ définie ci-dessus est le monôme $(-q)^n z^n$.

Une solution privilégiée dans [**?**] et [**?**] de l'équation du q-logarithme $\sigma_q x = x + 1$ est la fonction

$$l_q(z) = z\frac{\theta_q'(z)}{\theta_q(z)}$$

Elle est méromorphe sur $\mathbb{C}^*$. Ses pôles (simples) sont les points de la q-spirale $q^{\mathbb{Z}}$ et elle n'a pas de zéro.

Pour simplifier, on dira simplement équations des caractères et équation du logarithme pour les équations aux q-différences $\sigma_q x = ax$, avec $a \in \mathbb{C}^*$, et $\sigma_q x = x + 1$.

Résolution locale

On considère un système aux q-différences $\sigma_q X = AX$ fuchsien en 0. On note $\sigma_q X = A^{(0)}X$ un système aux q-différences linéaire à coefficients constants localement équivalent, via une tranformation de jauge locale $F^{(0)} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$, au système $\sigma_q X = AX$.

Une matrice fondamentale de solutions méromorphes (globales), $\mathcal{X}^{(0)}(z) \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*))$, pour le système à coefficients constants $\sigma_q X = A^{(0)}X$, est construite dans [**?**] p. 1030 à partir des fonctions de base $e_{q,a}(z)$ et $l_q(z)$, et en fonction de la décomposition de Dunford multiplicative (*cf* [**?**] p. 644) de la matrice $A^{(0)}$.

Ensuite, la matrice $F^{(0)}(z)\mathcal{X}^{(0)}(z) \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*))$ fournit une matrice fondamentale de solutions méromorphes locales, attachée à 0, pour le système aux q-différences $\sigma_q X = AX$.

2.1.5 Le corps des constantes

Définition 2.1.7. *Le corps des constantes de la théorie des équations aux q-différences est le sous-corps de $\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$:*

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q} = \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*) \,:\, \sigma_q f = f\}$$

On remarque facilement que le corps des constantes $\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q}$ contient le corps identifié à $\mathbb{C}$ des fonctions constantes.
Ensuite, on fixe un nombre complexe $\tau \in \mathbb{C}$ tel que $e^{-2i\pi\tau} = q$. Comme $|q| > 1$, on a $\Im(\tau) > 0$.
On a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{e^{2i\pi\cdot}} & \mathbb{C}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

L'application $x \mapsto e^{2i\pi x}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ est un revêtement biholomorphe et permet d'identifier $\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q}$ avec le sous-corps de $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ formé des fonctions admettant $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ pour réseau de périodes. Elles correspondent donc aussi aux fonctions méromorphes sur le tore complexe $E_q \simeq \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$. Ces fonctions sont appelées fonctions elliptiques. Une étude de ces fonctions est par exemple menée dans [**?**]. Ce sont exactement les fractions rationnelles en la fonction $\wp$ de Weierstrass associée au réseau $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$, et sa dérivée $\wp'$. Elles constituent une extension transcendante de $\mathbb{C}$.

Il y a plusieurs justifications à la définition 2.1.7. En voici quelques unes :

- Selon l'analogie suivie dans [**?**] et [**?**] entre les équations différentielles et les équations aux q-différences, l'équation différentielle $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$ a pour q-analogue l'équation

$$\sigma_q x = x$$

que l'on appelle équation des constantes.

- Si $\mathcal{X}_1(z), \mathcal{X}_2(z) \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*))$ sont deux matrices fondamentales de solutions pour un système aux q-différences linéaire rationnel $\sigma_q X = AX$, avec $A \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, on a

$$(\mathcal{X}_1^{-1}\mathcal{X}_2)(qz) = \mathcal{X}_1(qz)^{-1}\mathcal{X}_2(qz) = \mathcal{X}_1^{-1}(z)A(z)^{-1}A(z)\mathcal{X}_2(z) = \mathcal{X}_1^{-1}(z)\mathcal{X}_2(z) = (\mathcal{X}_1^{-1}\mathcal{X}_2)(z)$$

Aussi, il existe une matrice $C(z) \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q})$ telle que $\mathcal{X}_2(z) = \mathcal{X}_1(z)C(z)$.

- En particulier, pour $a, b \in \mathbb{C}^*$, les fonctions $e_{q,a}e_{q,b}$ et $e_{q,ab}$ sont toutes deux des solutions de l'équation des caractères $x(qz) = abx(z)$, et diffèrent d'une fonction elliptique non triviale

$$\varphi_{a,b}(z) = \frac{e_{q,a}e_{q,b}}{e_{q,ab}} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q} \setminus \mathbb{C}$$

Sauloy montre dans [?] p. 21 que la famille des cocycles $\varphi_{a,b}(z)$ engendre le corps des constantes $\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q}$.

2.2 La dynamique d'un système aux q-différences

Afin de définir un D-groupoïde de Galois pour les équations aux q-différences, il faut commencer par associer à chaque système aux q-différences, un groupoïde ensembliste qui joue le rôle du groupoïde d'holonomie du cas différentiel, et qui donc représente, dans un certain sens, la dynamique du système.

On commencera par définir ce groupoïde ensembliste, que l'on appellera dynamique, pour les systèmes aux q-différences linéaires et l'on verra ensuite que cette définition s'étend naturellement aux systèmes aux q-différences non linéaires.

Pour la suite de ce chapitre et les suivants, on désignera souvent les difféomorphismes locaux, ou les germes de difféomorphismes locaux de M, seulement par l'application $(z, X) \mapsto (G_1(z, X), G_2(z, X))$ qui les définit. On s'autorisera donc à confondre difféomorphismes locaux et germes de difféomorphismes locaux. On précisera rarement le domaine de définition du difféomorphisme local ou la source du germe. Par contre, on sous-entendra toujours que l'application $(z, X) \mapsto (G_1(z, X), G_2(z, X))$ considérée est bien définie, holomorphe et inversible au voisinage des points du domaine de définition ou du point source.

Lorsque ce ne sera pas précisé, on désignera par k un entier relatif (non fixé).

2.2.1 Dynamique d'un système aux q-différences linéaire

Soit $X(qz) = A(z)X(z)$ un système aux q-différences linéaire rationnel de rang n défini par une matrice $A \in GL_n(\mathbb{C}(z))$. On note $S(A)$ le lieu singulier de la matrice A, c'est-à-dire l'ensemble formé des pôles de A et des pôles de A^{-1}.

Définition 2.2.1. *La dynamique du système aux q-différences $X(qz) = A(z)X(z)$ est le sous-groupoïde ensembliste de $Aut(P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)$ engendré, au sens de la propriété* 1.2.9*, par les germes de difféomorphismes locaux de la forme $(z, X) \mapsto (qz, A(z)X)$.*
Les éléments de ce groupoïde ensembliste sont donc les germes de difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme $(z, X) \mapsto (q^k z, A_k(z)X)$, pour $k \in \mathbb{Z}$ et avec

$$A_k(z) = \begin{cases} Id_n & si\ k = 0 \\ \prod_{i=0}^{k-1} A(q^i z) & si\ k \in \mathbb{N}^* \\ \prod_{i=k}^{-1} A(q^i z)^{-1} & si\ k \in -\mathbb{N}^* \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé, les points $(z, X) \in P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ au voisinage desquels l'application $(z, X) \mapsto (q^k z, A_k(z)X)$ est un difféomorphisme local, sont ceux tels que

$$z \notin \begin{cases} \emptyset & si\ k = 0 \\ \cup_{l=0}^{k-1} q^{-l} S(A) & si\ k \in \mathbb{N}^* \\ \cup_{l=1}^{-k} q^{l} S(A) & si\ k \in -\mathbb{N}^* \end{cases}$$

On notera (un peu abusivement) ce groupoïde ensembliste

$$Dyn(A(z)) = \{(z, X) \mapsto (q^k z, A_k(z)X)\}$$

Exemples 2.2.2.
- La dynamique de l'équation des constantes $x(qz) = x(z)$ est le sous-groupoïde ensembliste de $Aut(P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C})$:

$$Dyn(1) = \{(z, x) \mapsto (q^k z, x)\}$$

- La dynamique de l'équation $x(qz) = q^l x(z)$ du caractère z^l, avec $l \in \mathbb{Z}$, est le sous-groupoïde ensembliste de $Aut(P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C})$:

$$Dyn(q^l) = \{(z, x) \mapsto (q^k z, q^{lk} x)\}$$

- Plus généralement, la dynamique de l'équation des caractères $x(qz) = ax(z)$, d'exposant $a \in \mathbb{C}^*$ (quelconque), est le sous-groupoïde ensembliste de $Aut(P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C})$:

$$Dyn(a) = \{(z, x) \mapsto (q^k z, a^k x)\}$$

- La dynamique d'un système aux q-différences linéaire de rang n à coefficients constants $X(qz) = AX(z)$, avec $A \in GL_n(\mathbb{C})$, est le sous-groupoïde ensembliste de $Aut(P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)$:

$$Dyn(A) = \{(z, X) \mapsto (q^k z, A^k X)\}$$

- La dynamique de l'équation $x(qz) = -qzx(z)$ de la fonction θ_q est le sous-groupoïde ensembliste de $Aut(P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C})$:

$$Dyn(z) = \{(z, x) \mapsto (q^k z, (-1)^k q^{\frac{k(k+1)}{2}} z^k x)\}$$

2.2.2 Dynamique d'un système aux q-différences non linéaire

La définition de la dynamique d'un système aux q-différences linéaire s'étend naturellement à des systèmes aux q-différences non-linéaires. Soit donc $X(qz) = F(z, X(z))$ un système aux q-différences non linéaire de taille n, avec par exemple $F \in \mathbb{C}(z, X)^n$, ce qui est la situation naturelle.

Définition 2.2.3. *La dynamique du système aux q-différences $X(qz) = F(z, X(z))$ est le sous-groupoïde ensembliste de $Aut(P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)$, que l'on notera $Dyn(F)$, engendré par les germes de difféomorphismes locaux de la forme $(z, X) \mapsto (qz, F(z, X))$.*

Exemple 2.2.4.
- La dynamique de l'équation du logarithme $x(qz) = x(z) + 1$ est le sous-groupoïde ensembliste de $Aut(P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C})$:

$$Dyn((x(qz) = x(z) + 1) = \{(z, x) \mapsto (q^k z, x + k)\}$$

- Plus généralement, la dynamique de l'équation $x(qz) = x(z) + b$, avec $b \in \mathbb{C}^*$, est le sous-groupoïde ensembliste de $Aut(P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C})$:

$$Dyn(x(qz) = x(z) + b) = \{(z, x) \mapsto (q^k z, x + kb)\}$$

- La dynamique de l'équation $x(qz) = x(z) + z$ est le sous-groupoïde ensembliste de $Aut(P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C})$:

$$Dyn(x(qz) = x(z) + z) = \{(z, x) \mapsto (q^k z, x + \frac{1 - q^k}{1 - q} z)\}$$

Les exemples précédents sont de faux exemples d'équations aux q-différences non linéaires. En effet, ces équations peuvent être linéarisées. On peut donc les mettre sous forme vectorielle et calculer la dynamique d'un système aux q-différences linéaire rationnel. Ces remarques sont l'objet des exercices suivants.

Exercice 2.2.5. On linéarise l'équation du logarithme en remarquant que $x(qz) - x(z) = 1 = x(q^2z) - x(qz)$, ce qui donne l'équation aux q-différences linéaire $x(q^2z) - 2x(qz) + x(z) = 0$.
Par vectorialisation, on obtient le système aux q-différences linéaire de rang 2 défini par la matrice à coefficients constants $L = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{C})$.
La matrice L est une matrice unipotente. La matrice $N = L - I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ est nilpotente d'indice 2 donc $L^k = I_2 + kN$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Aussi, la dynamique du système $X(qz) = LX(z)$ est

$$Dyn(L) = \{(z, X) \mapsto (q^k z, \left(\begin{smallmatrix} 1+k & -k \\ k & 1-k \end{smallmatrix}\right) X)\}$$

Exercice 2.2.6. On linéarise une équation $x(qz) = x(z) + b$, avec $b \in \mathbb{C}^*$, en remarquant que $x(qz) - x(z) = b = x(q^2z) - x(qz)$, comme pour l'équation du logarithme, et on obtient encore l'équation $x(q^2z) - 2x(qz) + x(z) = 0$.
Ceci est naturel puisque l'équation aux q-différences $y(qz) = y(z) + b$, avec $b \in \mathbb{C}^*$, est obtenue à partir de l'équation du logarithme $x(qz) = x(z) + 1$ grâce au changement de fonction inconnue $y = bx$, qui est linéaire et à coefficient constant.

Exercice 2.2.7. On linéarise l'équation $x(qz) = x(z) + z$ en remarquant que $q(x(qz) - x(z)) = qz = x(q^2z) - x(qz)$, ce qui donne l'équation aux q-différences linéaire $x(q^2z) - (1+q)x(qz) + qx(z) = 0$.
Par vectorialisation, on obtient le système aux q-différences linéaire de rang 2 défini par la matrice à coefficients constants $S = \left(\begin{smallmatrix} 1+q & -q \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{C})$.
Cette matrice est semi-simple, conjuguée à la matrice $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{C})$. On a $S = PDP^{-1}$, avec $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & q \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et donc $S^k = PD^kP^{-1} = \frac{1}{1-q}\left(\begin{smallmatrix} 1-q^{k+1} & q(q^k-1) \\ 1-q^k & q^k-q \end{smallmatrix}\right)$, ce qui explicite complètement la dynamique

$$Dyn(S) = \{(z, X) \mapsto (q^k z, \frac{1}{1-q}\left(\begin{smallmatrix} 1-q^{k+1} & q(q^k-1) \\ 1-q^k & q^k-q \end{smallmatrix}\right) X)\}$$

2.3 La D-enveloppe de la dynamique

Dans le cas différentiel, on peut estimer que le D-groupoïde de Galois d'un système différentiel est la D-enveloppe de son groupoïde ensembliste d'holonomie.

On définit ici, dans la définition 2.3.1 ci-dessous, le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences : c'est la D-enveloppe, au sens des D-groupoïdes, de la dynamique du système.
On calculera ce D-groupoïde de Galois pour des systèmes aux q-différences simples et élémentaires.

On se place dans la situation de la partie 2.2.2. On considère un système aux q-différences *a priori* non linéaire $X(qz) = F(z, X(z))$, avec $F(z, X) \in \mathbb{C}(z, X)^n$.

Définition 2.3.1. *On appellera D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences $X(qz) = F(z, X(z))$, avec $F(z, X) \in \mathbb{C}(z, X)^n$, la D-enveloppe sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, dans le sens de la définition* 1.2.42*, de la dynamique $Dyn(F)$ du système. C'est encore, dans le sens de la définition* 1.2.43*, l'intersection des D-groupoïdes sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ contenant les éléments de la dynamique $Dyn(F)$ parmi leurs solutions, ou le plus petit D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ contenant les éléments de la dynamique $Dyn(F)$ parmi ses solutions.*
On notera $\mathcal{G}al(F)$ l'idéal de $\mathcal{O}_{J^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}$ qui le définit.

2.3.1 Calcul du D-groupoïde de Galois de l'équation des constantes $x(qz) = x(z)$

Tout d'abord, comment, intuitivement, obtient-on le D-groupoïde de Galois de l'équation des constantes $x(qz) = x(z)$?
Essentiellement, il s'agit de déterminer les équations de $\mathcal{O}_{J^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$ qui sont vérifiées par les

germes de difféomorphismes locaux de la dynamique $Dyn(1)$ et qui respectent leur structure de groupoïde ensembliste.

On rappelle que les éléments de la dynamique $Dyn(1)$ de l'équation des constantes sont les germes des difféomorphismes (locaux) de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ de la forme $(z,x)\mapsto(q^kz,x)$.
On remarque que la première composante de ces difféomorphismes est indépendante de la variable x et dépend linéairement de la variable z. La seconde composante reste inchangée. Ceci se traduit en termes d'équations aux dérivées partielles et revient à dire que les germes des difféomorphismes $(z,x)\mapsto(q^kz,x)$ sont des solutions, au sens de la définition 1.1.38, des équations

$$\frac{\partial\bar z}{\partial x}\,,\ \frac{\partial^2\bar z}{\partial z^2}\,,\ z\frac{\partial\bar z}{\partial z}-\bar z\,,\ \bar x-x$$

de $\mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C},P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$, et naturellement, de leurs dérivées.
Les solutions de ce système d'équations sont les germes de difféomorphismes locaux de la forme $(z,x)\mapsto(\alpha z,x)$, avec $\alpha\in\mathbb{C}^*$. L'ensemble de ces solutions forme un sous-groupoïde ensembliste de $Aut(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})$ et contient les éléments de la dynamique $Dyn(1)$.
De plus, comme les puissances q^k, pour $k\in\mathbb{Z}$, ne satisfont en famille aucune relation algébrique, il semble qu'il n'y ait pas d'autre équation satisfaite par les éléments de $Dyn(1)$.

On a plus précisément le résultat suivant :

Proposition 2.3.2. *Le D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(1)$ de l'équation des constantes $x(qz)=x(z)$ est le D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ engendré, au sens du théorème* 1.2.38*, par le groupoïde d'ordre* 2 *défini en coordonnées locales par :*

$$\left\langle\frac{\partial\bar z}{\partial x},\frac{\partial\bar z}{\partial z}z-\bar z,\partial^2\bar z,\bar x-x,\frac{\partial\bar x}{\partial z},\frac{\partial\bar x}{\partial x}-1,\partial^2\bar x\right\rangle\subset\mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C},P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$$

Les solutions $sol(\mathcal{G}al(1))$ de ce D-groupoïde sont les germes de difféomorphismes de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ de la forme $(z,x)\mapsto(\alpha z,x)$, avec $\alpha\in\mathbb{C}^*$.

Démonstration. Pour cette preuve, on note M la variété analytique complexe $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ et $\mathcal{I}_2$ l'idéal de $\mathcal{O}_{J_2^*(M,M)}$ engendré par les équations $\frac{\partial\bar z}{\partial x},\frac{\partial\bar z}{\partial z}z-\bar z,\partial^2\bar z,\bar x-x,\frac{\partial\bar x}{\partial z},\frac{\partial\bar x}{\partial x}-1,\partial^2\bar x$.
On va commencer par vérifier que l'idéal $\mathcal{I}_2$ est un groupoïde d'ordre 2 sur M, qu'il engendre donc un D-groupoïde et que ce D-groupoïde est un majorant, dans le sens de la définition 1.2.43, du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(1)$ de l'équation. On montrera ensuite que ce majorant est minimal, c'est-à-dire qu'il est égal à $\mathcal{G}al(1)$.

On vérifie d'abord que l'idéal $\mathcal{I}_2$ est un groupoïde d'ordre 2 sur M. On a montré à la section 1.2.2 du chapitre 1 précédent que $\mathcal{Q}_2$ est un groupoïde d'ordre 2. Il reste donc à vérifier les conditions *(i)*, *(ii)* et *(iii)* de la définition 1.2.23 sur les générateurs $\bar x-x,\frac{\partial\bar x}{\partial z},\frac{\partial\bar x}{\partial x}-1,\partial^2\bar x$ de $\mathcal{I}_2$. On a par exemple (toujours à l'aide des calculs de la section 1.2.2) :
$c^*(\bar x-x)=\bar{\bar x}-x=(\bar{\bar x}-\bar x)+(\bar x-x)\in\mathcal{I}_2\widehat{\otimes}\mathcal{O}_{J_2^*(M,M)}+\mathcal{O}_{J_2^*(M,M)}\widehat{\otimes}\mathcal{I}_2$,
$e^*(\bar x-x)=x-x=0$,
$i^*(\bar x-x)=x-\bar x=-(\bar x-x)\in\mathcal{I}_2$,
$c^*(\frac{\partial\bar x}{\partial x}-1)=\frac{\partial\bar{\bar z}}{\partial\bar z}\frac{\partial\bar z}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\bar z}}{\partial\bar z}\frac{\partial\bar x}{\partial x}-1=\frac{\partial\bar{\bar z}}{\partial\bar z}\frac{\partial\bar z}{\partial x}+\frac{\partial\bar{\bar z}}{\partial\bar z}(\frac{\partial\bar x}{\partial x}-1)+\frac{\partial\bar{\bar z}}{\partial\bar z}-1\in\mathcal{I}_2\otimes\mathcal{O}_{J_2^*(M,M)}+\mathcal{O}_{J_2^*(M,M)}\otimes\mathcal{I}_2$,
$e^*(\frac{\partial\bar x}{\partial x}-1)=1-1=0$,
$i^*(\frac{\partial\bar x}{\partial x}-1)=\delta^{-1}\frac{\partial\bar z}{\partial z}-1=-\delta^{-1}\frac{\partial\bar z}{\partial z}(\frac{\partial\bar x}{\partial x}-1)+\delta^{-1}\frac{\partial\bar z}{\partial x}\frac{\partial\bar x}{\partial z}\in\mathcal{I}_2$.
Les calculs sur les autres générateurs $\frac{\partial\bar x}{\partial z}$ et $\partial^2\bar x$ sont similaires à ceux, déjà effectués à la section 1.2.2, sur les équations $\frac{\partial\bar z}{\partial x}$ et $\partial^2\bar z$.
On note $\sqrt{\mathcal{I}'}$ le système différentiel réduit engendré par $\mathcal{I}_2$. D'après le théorème 1.2.40, c'est un

D-groupoïde sur M. Ses solutions convergentes sont exactement les solutions convergentes de $\mathcal{I}_2$, c'est-à-dire les germes de difféomorphismes locaux de M de la forme $(z,x) \mapsto (\alpha z, x)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

L'idéal $\sqrt{\mathcal{I}'}$ est donc un D-groupoïde sur M qui contient les éléments de la dynamique $Dyn(1)$ de l'équation $x(qz) = x(z)$.
Aussi, comme le D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(1)$ est le plus petit D-groupoïde sur M, dans le sens de la définition 1.2.43, contenant $Dyn(1)$ parmi ses solutions, on a l'inclusion $\sqrt{\mathcal{I}'} \subset \mathcal{G}al(1)$, et donc, du point de vue des solutions $Dyn(1) \subset sol(\mathcal{G}al(1)) \subset sol(\sqrt{\mathcal{I}'})$. Le D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{I}'}$ est un majorant, dans le sens de la définition 1.2.43, du D-groupoïde $\mathcal{G}al(1)$.

Montrons qu'il y a égalité entre les D-groupoïdes $\sqrt{\mathcal{I}'}$ et $\mathcal{G}al(1)$. Soient a et b deux points de M de coordonnées locales (z_a, x_a) et (z_b, x_b).
Soit E une équation de la fibre $\mathcal{G}al(1)_{(a,b)}$. L'équation E, d'ordre noté r, est de la forme

$$E(z, x, \bar{z}, \bar{x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}, \delta^{-1}, \partial^2 \bar{z}, \partial^2 \bar{x}, \ldots, \partial^r \bar{z}, \partial^r \bar{x})$$

La dépendance en les variables source et but est holomorphe et la dépendance en les variables qui représentent les dérivées partielles évaluées en le point source est polynomiale. On peut donc considérer E comme un élément de l'anneau de polynômes

$$\mathbb{C}\left\{z - z_a, x - x_a, \bar{z} - z_b, \bar{x} - x_b\right\}\left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}, \delta^{-1}, \partial^2 \bar{z}, \partial^2 \bar{x}, \ldots, \partial^r \bar{z}, \partial^r \bar{x}\right].$$

On rappelle que $\delta = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial z}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$. Donc, quitte à multiplier E par une puissance positive de l'inversible δ, on peut supposer que E n'ait pas de puissance de δ au dénominateur.
Par des divisions euclidiennes successives de E puis de ses restes, par les polynômes unitaires $\frac{\partial \bar{x}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} - 1, \partial^2 \bar{z}, \partial^2 \bar{x}, \ldots, \partial^r \bar{z}, \partial^r \bar{x}$, on obtient une équation $E_1(z, x, \bar{z}, \bar{x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}) \in \mathcal{G}al(1)_{(a,b)}$, qui ne dépend que des variables $z, x, \bar{z}, \bar{x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}$ et telle que $E \equiv E_1 \mod (\sqrt{\mathcal{I}'})_{(a,b)}$.
Ensuite, par deux divisions de Weierstrass succesives (données par le lemme 1.2.29) de E_1 puis de son reste par $\bar{x} - x$ puis $\bar{z} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - \bar{z}z$, on obtient une équation $E_2(z, x, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}) \in \mathcal{G}al(1)_{(a,b)}$, qui ne dépend que des variables $z, x, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}$ et telle que $E_1 \equiv E_2 \mod (\sqrt{\mathcal{I}'})_{(a,b)}$.

Les éléments de $Dyn(1) = \{(z,x) \mapsto (q^k z, x)\}$ sont solutions de $\mathcal{G}al(1)$ et donc de E_2. On considère maintenant E_2 comme un polynôme en la variable $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z}$. L'évaluation de ses coefficients en un point source (z_0, x_0) d'un ouvert de définition de E_2 donne un polynôme $E_2(z_0, x_0, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z})$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ en l'indéterminée $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z}$ qui est annulé par toutes les puissances q^k, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ce polynôme est donc nul, et ses coefficients sont donc nuls. Aussi, les coefficients de l'équation E_2, considérée comme un polynôme en la variable $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z}$, sont nuls sur un ouvert de définition de E_2 et donc $E_2 = 0$. Les fibres des idéaux $\mathcal{G}al(1)$ et $\sqrt{\mathcal{I}'}$ coïncident. On a donc $\mathcal{G}al(1) = \sqrt{\mathcal{I}'}$, et bien entendu, $sol(\mathcal{G}al(1)) = sol(\sqrt{\mathcal{I}'})$. □

Remarque 2.3.3. *L'idéal $\mathcal{I}_2$ est différent de l'idéal de $\mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$ engendré par les seules équations $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial z^2}$, $z\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - \bar{z}$, $\bar{x} - x$, qui a pourtant les mêmes solutions convergentes que $\mathcal{I}_2$. Ces deux idéaux sont des groupoïdes d'ordre 2 sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et engendrent le même D-groupoïde, qui est donc $\mathcal{G}al(1)$.*
J'ai préféré présenter le D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(1)$ comme le D-groupoïde engendré par l'idéal $\mathcal{I}_2$, parce que c'est un groupoïde d'ordre 2 formellement intégrable.

2.3.2 Etude de quelques exemples élémentaires

La méthode utilisée pour calculer explicitement le D-groupoïde de Galois de l'équation des constantes $x(qz) = x(z)$ permet d'étudier les D-groupoïdes de Galois d'exemples simples d'équations aux q-différences.

On présente ici les résultats, remarques et questions ainsi obtenus. Bien entendu, on ne reprendra pas tous les arguments avec autant de détail que dans la preuve de la proposition 2.3.2, on insistera seulement sur les particularités de chaque exemple.

L'équation $x(qz) = q^l x(z)$ du caractère z^l, avec $l \in \mathbb{Z}$

Soit $l \in \mathbb{Z}$. D'après l'exemple 2.2.2, les éléments de la dynamique de l'équation $x(qz) = q^l x(z)$ sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la forme $(z, x) \mapsto (q^k z, q^{lk} x)$.

Proposition 2.3.4. *Le D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(q^l)$ de l'équation $x(qz) = q^l x(z)$ est le D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ engendré par le groupoïde d'ordre 2 :*

$$\left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} z - \bar{z}, \partial^2 \bar{z}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} x - \bar{x}, \partial^2 \bar{x}, (\frac{\partial \bar{z}}{\partial z})^l - \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right\rangle \subset \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$$

Ses solutions $sol(\mathcal{G}al(q^l))$ sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la forme $(z, x) \mapsto (\alpha z, \alpha^l x)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Démonstration. La preuve de cette proposition est similaire à la preuve de la proposition 2.3.2. Certains calculs sont bien entendu un peu différents, mais ils ne demandent aucune technique autre que celle déjà développée.
Ce résultat est aussi un cas particulier du calcul plus général du D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire de rang n à coefficients constants, qui sera fait dans le chapitre 4. □

Les équations des caractères $x(qz) = ax(z)$, avec $a \in \mathbb{C}^*$

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ fixé. Les éléments de la dynamique de l'équation des caractères $x(qz) = ax(z)$ d'exposant $a \in \mathbb{C}^*$ fixé, sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ de la forme $(z, x) \mapsto (q^k z, a^k x)$.

On note $\mathcal{R}_a = \{(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ q^{\lambda_0} = a^{\lambda_1}\}$.

Proposition 2.3.5. *Le D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(a)$ de l'équation des caractères $x(qz) = ax(z)$ est le D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ engendré par le groupoïde d'ordre 2 :*

$$\left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} z - \bar{z}, \partial^2 \bar{z}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} x - \bar{x}, \partial^2 \bar{x}, (\frac{\partial \bar{z}}{\partial z})^{\lambda_0} - (\frac{\partial \bar{x}}{\partial x})^{\lambda_1} \ ; \ (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathcal{R}_a \right\rangle \subset \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$$

Ses solutions $sol(\mathcal{G}al(a))$ sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la forme $(z, x) \mapsto (\alpha z, \beta x)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ tels que $\alpha^{\lambda_0} = \beta^{\lambda_1}$, pour tout couple $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathcal{R}_a$.

Démonstration. Ce résultat est un cas particulier du calcul plus général du D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire de rang n à coefficients constants, qui sera fait dans le chapitre 4. □

On explique maintenant comment déterminer, selon l'exposant $a \in \mathbb{C}^*$, l'ensemble $\mathcal{R}_a$ des couples $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $q^{\lambda_0} = a^{\lambda_1}$ puis l'on précise le résultat de la proposition 2.3.5 précédente selon l'exposant a.

Soit $\tau \in \mathbb{C}$ tel que $q = e^{2i\pi\tau}$. L'image de la décomposition $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\tau$ par la projection $e^{2i\pi\cdot}$

est le produit $\mathbb{C}^* = \mathbb{U} \times q^{\mathbb{R}}$, avec $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}^*; |z| = 1\}$.
Si l'on note $a = u_a q^{y_a}$, avec $u_a \in \mathbb{U}$ et $y_a \in \mathbb{R}$, l'unique décomposition de a dans le produit $\mathbb{C}^* = \mathbb{U} \times q^{\mathbb{R}}$, on a

$$\mathcal{R}_a = \{(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ u_a^{\lambda_1} = 1 \, , \, \lambda_0 = \lambda_1 y_a\}$$

Aussi, pour que $\mathcal{R}_a$ ne soit pas réduit à $\{(0,0)\}$, il faut (et il suffit) que u_a soit une racine de l'unité, et que $y_a \in \mathbb{Q}$.

On suppose donc que $a \in \mu_\infty q^{\mathbb{Q}}$, avec μ_∞ l'ensemble des racines de l'unité. On note $d \in \mathbb{N}^*$ l'ordre de u_a et $(p_a, q_a) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $y_a = p_a/q_a$ et $p_a \wedge q_a = pgcd(p_a, q_a) = 1$. On note $d' = d/(d \wedge q_a)$. Alors, l'ensemble $\mathcal{R}_a$ est le sous-$\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}(p_a d', q_a d')$ de $\mathbb{Z}^2$.
Dans ce cas, les solutions du D-groupoïde de Galois de l'équation $x(qz) = ax(z)$ sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la forme $(z, x) \mapsto (\alpha z, u\alpha^{p/q} x)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, u une racine d'-ème de l'unité et α^{p_a/q_a} une racine q-ème de α^{p_a}.

Si $a \notin \mu_\infty q^{\mathbb{Q}}$, l'ensemble $\mathcal{R}_a$ est réduit à $\{(0,0)\}$ et les solutions du D-groupoïde de Galois de l'équation $x(qz) = ax(z)$ sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la forme $(z, x) \mapsto (\alpha z, \beta x)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$.

Le système $X(qz) = SX(z)$

Le système aux q-différences linéaire $X(qz) = SX(z)$, défini par la matrice semi-simple $S = \begin{pmatrix} 1+q & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, est obtenu par vectorialisation de l'équation aux q-différences linéaire $x(q^2 z) - (1 + q)x(z) + q = 0$, qui elle-même est l'équation linéarisée de $x(qz) = x(z) + z$.

D'après l'exercice 2.2.7, les éléments de la dynamique du système $X(qz) = SX(z)$ sont les germes de difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ de la forme $(z, X) \mapsto (q^k z, \frac{1}{1-q} \begin{pmatrix} 1-q^{k+1} & q(q^k-1) \\ 1-q^k & q^k - q \end{pmatrix} X)$.

Proposition 2.3.6. *Le D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(S)$ du système $X(qz) = SX(z)$ est le D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ engendré par le groupoïde d'ordre 2 :*

$$\left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} z - \bar{z}, \partial^2 \bar{z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} X - \bar{X}, \partial^2 \bar{X}, \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial X_1} - \left(\frac{1 - q\frac{\partial \bar{z}}{\partial z}}{1-q} \right), \right.$$

$$\left. \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial X_2} - \left(\frac{q(\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - 1)}{1-q} \right), \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial X_1} - \left(\frac{1 - \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}}{1-q} \right), \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial X_2} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \left(\frac{\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - q}{1-q} \right) \right\rangle \subset \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$$

Ses solutions $sol(\mathcal{G}al(S))$ sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \frac{1}{1-q} \begin{pmatrix} 1-q\alpha & q(\alpha-1) \\ 1-\alpha & \alpha - q \end{pmatrix} X)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Démonstration. La preuve de cette proposition est similaire à la preuve de la proposition 2.3.2. □

Les éléments de la dynamique de l'équation $x(qz) = x(z) + z$ sont les germes de difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la forme $(z, x) \mapsto (q^k z, x + \frac{1-q^k}{1-q} z)$.

Proposition 2.3.7. *Le D-groupoïde de Galois de l'équation $x(qz) = x(z) + z$ est le D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ engendré par le groupoïde d'ordre 2 :*

$$\left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} z - \bar{z}, \partial^2 \bar{z}, (1-q)(\bar{x} - x) - (z - \bar{z}), \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} - 1, \partial^2 \bar{x} \right\rangle \subset \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$$

Ses solutions sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la forme $(z, x) \mapsto (\alpha z, x + \frac{1-\alpha}{1-q} z)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Démonstration. La preuve de cette proposition est similaire à la preuve de la proposition 2.3.2. On précise que cette proposition ne se déduit pas de la proposition 2.3.6 : le calcul se fait directement à partir de l'équation linéaire avec second membre $x(qz) = x(z) + z$. □

L'équation du logarithme $x(qz) = x(z) + 1$

Par linéarisation, puis vectorialisation, l'équation du logarithme $x(qz) = x(z) + 1$ donne le système aux q-différences $X(qz) = LX(z)$, défini par la matrice unipotente $L = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

D'après l'exercice 2.2.5, les éléments de la dynamique du système $X(qz) = LX(z)$ sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ de la forme $(z, X) \mapsto (q^k z, \left(\begin{smallmatrix} 1+k & -k \\ k & 1-k \end{smallmatrix}\right)X)$.

Proposition 2.3.8. *Le D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(L)$ du système $X(qz) = LX(z)$ est le D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ engendré par le groupoïde d'ordre 2 :*

$$\left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial X}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} z - \bar{z}, \partial^2 \bar{z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} X - \bar{X}, \partial^2 \bar{X}, \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial X_1} - \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial X_1} - 1, \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial X_1}, \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial X_1} - 1 \right\rangle$$

$\subset \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2)}$ *et ses solutions sont les germes de difféomorphismes de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2$ de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \left(\begin{smallmatrix} 1+\beta & -\beta \\ \beta & 1-\beta \end{smallmatrix}\right)X)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. On suit les étapes de la preuve de la proposition 2.3.2. On montre de façon similaire que l'idéal de $\mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2)}$ proposé est un groupoïde d'ordre 2 et qu'il engendre un majorant du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(L)$ du système $X(qz) = LX(z)$.
Ensuite, on montre que toute équation de $\mathcal{G}al(L)$ est congrue modulo ce majorant à une équation de $\mathcal{G}al(L)$ de la forme $E(z, X, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial X_1})$. Pour tout point source (z_0, X_0) d'un ouvert de définition de E, on obtient un polynôme $E(z_0, X_0, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial X_1})$ annulé par la famille de points (q^k, k).
Il reste donc à montrer qu'il n'existe pas de relation algébrique non triviale vérifiée par cette famille de points. Ceci est un argument sur la structure des groupes algébriques commutatifs, qui sera rappelée au chapitre 4. On sait que le sous-groupe algébrique de $GL_3(\mathbb{C})$ engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} q^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

admet pour seuls sous-groupes algébriques propres $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{C}$.
Je ne développe pas plus cet argument car le résultat de la proposition 2.3.8 est un cas particulier du calcul plus général du D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire de rang n à coefficients constants, qui sera fait dans le chapitre 4. □

Les éléments de la dynamique de l'équation du logarithme $x(qz) = x(z) + 1$ sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la forme $(z, x) \mapsto (q^k z, x + k)$.

Proposition 2.3.9. *Le D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ engendré par le groupoïde d'ordre 2 :*

$$\left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} z - \bar{z}, \partial^2 \bar{z}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} - 1, \partial^2 \bar{x} \right\rangle \subset \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$$

est un majorant, dans le sens de la définition 1.2.43, du D-groupoïde de Galois de l'équation du logarithme $x(qz) = x(z) + 1$.
Ses solutions sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la forme $(z, x) \mapsto (\alpha z, x + \beta)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$.

Démonstration. La preuve de cette proposition est similaire à la première partie de la preuve de la proposition 2.3.2. □

Remarque 2.3.10. Je conjecture que le majorant donné par la proposition 2.3.9 précédente, pour le D-groupoïde de Galois de l'équation du logarithme $x(qz) = x(z) + 1$, est exactement le D-groupoïde de Galois.
Cependant, la réduction d'une équation du D-groupoïde de Galois, modulo les équations du majorant, donne une équation de la forme $E(z, x, \bar{x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z})$. Pour un point quelconque $(a, b) \in (P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)^2$, il existe au plus un germe de difféomorphisme local $(z, x) \mapsto (q^k z, x + k)$, de la dynamique de l'équation $x(qz) = x(z) + 1$, dont la source est a et le but est b. Ce fait m'empêche ici de conclure que l'équation E restante est nécessairement nulle.

L'équation $x(qz) = -qzx(z)$ de θ_q

D'après l'exemple 2.2.2, les éléments de la dynamique de l'équation $x(qz) = -qzx(z)$ sont les germes des difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la forme $(z, x) \mapsto (q^k z, (-1)^k q^{\frac{k(k+1)}{2}} z^k x)$.

On remarque que tout monôme $m(z) = cz^l$, avec $c \in \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{Z}$, vérifie l'équation différentielle

$$\left(\frac{zm'(z)}{m(z)}\right)' = 0$$

que l'on récrit

$$m(z)m'(z) + zm(z)m''(z) - zm'(z)^2 = 0$$

Les éléments de la dynamique $Dyn(-qz)$ sont donc solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial z \partial x}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + z\frac{\partial^3 \bar{x}}{\partial z^2 \partial x}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} - z\left(\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial z \partial x}\right)^2$$

Aussi, on aimerait arriver à montrer que l'idéal

$$\mathcal{T}_3 = \left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, z\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - \bar{z}, \partial^2 \bar{z}, \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial x^2}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}x - \bar{x}, \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial z \partial x}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + z\frac{\partial^3 \bar{x}}{\partial z^2 \partial x}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} - z\left(\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial z \partial x}\right)^2 \right\rangle$$

de $\mathcal{O}_{J_3^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$ est un groupoïde d'ordre 3 sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Cependant, je ne parvient pas à calculer, même partiellement, les dérivées partielles troisièmes de l'inverse d'un 3-jet en fonction des coordonnées locales du 3-jet, et montrer ainsi que l'idéal $\mathcal{T}_3$ est un groupoïde d'ordre 3.
On remarque seulement que les solutions convergentes du système différentiel $\mathcal{T}_3$ sont les germes de difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la forme $(z, x) \mapsto (\alpha z, \beta z^\gamma x)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ et $\gamma \in \mathbb{C}$. On vérifie facilement que ces solutions forment un sous-groupoïde ensembliste de $Aut(P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C})$, mais ce n'est pas suffisant pour affirmer que l'idéal $\mathcal{T}_3$ est un groupoïde d'ordre 3.

L'idéal $\mathcal{T}_3$ est construit de sorte que les éléments de la dynamique $Dyn(z)$ en soient des solutions convergentes. Cela est confirmé par le calcul. Aussi, si effectivemment l'idéal $\mathcal{T}_3$ est un groupoïde d'ordre 3 sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, ce que je conjecture, le D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{T}_3'}$ qu'il engendre est un majorant, dans le sens de la définition 1.2.43, du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(-qz)$ de l'équation $x(qz) = -qzx(z)$ de θ_q.

Chapitre 3

Un majorant pour le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire

Le D-groupoïde de Galois d'une équation différentielle non linéaire est, essentiellement, la D-enveloppe de son groupoïde ensembliste d'holonomie, et donc une adhérence de Zariski[1] d'un objet transcendant qui représente sa dynamique. En ce sens déjà, et par exemple par analogie au théorème de Schlesinger, c'est un objet de nature galoisienne.

La définition du D-groupoïde de Galois d'une équation différentielle donnée dans [**?**] est aussi justifiée par le fait que le D-groupoïde de Galois d'un système différentiel linéaire redonne une description du groupe de Galois différentiel du système. La comparaison du D-groupoïde de Galois d'un système différentiel linéaire avec la définition tannakienne de son groupe de Galois différentiel est exposée dans [**?**], et le lien de ce D-groupoïde avec l'extension de Picard-Vessiot du système est donnée dans [**?**].

La première étape de la preuve de [**?**] consiste à mettre en évidence un majorant du D-groupoïde de Galois. C'est le D-groupoïde qui rend compte de la structure linéaire transverse du feuilletage défini par le système différentiel linéaire. Cette majoration permet de montrer que les solutions du D-groupoïde de Galois qui fixent les transversales correspondent aux éléments d'un groupe algébrique qui contient la monodromie de l'équation. La seconde étape de la preuve consiste à montrer que ce groupe algébrique est le groupe de Galois différentiel du système.

La définition d'un D-groupoïde de Galois pour les systèmes aux q-différences, proposée dans le chapitre 2 précédent, est, comme dans le cas différentiel, la D-enveloppe d'un groupoïde ensembliste qui représente la dynamique du système. Il faut maintenant justifier cette définition en étudiant le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire, et montrer qu'il redonne le groupe de Galois du système.

Dans ce chapitre, on va mettre en évidence un majorant pour le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire, qui rend compte de la forme particulière des éléments de la dynamique d'un tel système. Bien que la situation soit différente du cas différentiel, le calcul de ce majorant permet ensuite, en considérant les solutions du D-groupoïde de Galois qui fixent les transversales, d'obtenir un groupe, candidat à redonner le groupe de Galois de l'équation.

Avant de considérer les systèmes aux q-différences linéaires, on va commencer par décrire un majorant pour le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences quelconque, et donc éventuellement non linéaire.

[1] L'expression « adhérence de Zariski » doit ici être interprétée dans un sens large.

Ensuite, on va décrire un majorant pour le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire. Grâce à ce majorant, on va montrer que pour un tel système, les solutions sont naturellement définies au voisinage de transversales de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$.

Cette propriété des solutions va permettre, en considérant les solutions du D-groupoïde de Galois qui fixent les transversales, d'associer un groupe à chaque transversale. On va le calculer sur quelques exemples.

Pour finir, on va mettre en évidence, pour les systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants, un majorant plus fin, grâce auquel on montrera que le groupe associé à chaque transversale est un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$.

3.1 Le majorant $\sqrt{\mathcal{Q}'}$

Une équation différentielle *a priori* non linéaire définit un feuilletage, c'est-à-dire une structure géométrique particulière sur l'espace des phases. Le groupoïde d'invariance de cette structure engendre un D-groupoïde sur cet espace, qui est un majorant du D-groupoïde de Galois. [2]
Ce majorant est le groupoïde des automorphismes du feuilletage, c'est-à-dire le groupoïde des germes de difféomorphismes locaux qui laissent globalement invariantes les feuilles du feuilletage, tout en les permutant de façon arbitraire. Il contient donc bien les transformations d'holonomie du feuilletage.

On propose ici un majorant naturel pour le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences *a priori* non linéaire. On peut le considérer comme un analogue du groupoïde des automorphismes du feuilletage du cas différentiel. Il rend compte de la forme particulière des éléments de la dynamique d'un système aux q-différences.
Ce majorant est le D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{Q}'}$, défini sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, que l'on a utilisé pour illustrer les définitions du chapitre 1. Il est défini, en tant que D-groupoïde, dans l'exemple 1.2.39. On le reprend ici dans le cadre de notre étude.

Tout d'abord, que signifie, intuitivement, la mise en évidence d'un majorant, dans le sens de la définition 1.2.43, pour le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences ?
Du point de vue des équations, cela signifie que l'on met en évidence des équations vérifiées par les éléments la dynamique, qui préservent la structure de goupoïde ensembliste de la dynamique, et qui sont donc des équations du D-groupoïde de Galois. Cependant, elles ne donnent peut-être pas toutes les contraintes algébriques et différentielles vérifiées par les éléments de la dynamique, et ne définissent donc peut-être pas le D-groupoïde de Galois tout entier.
Du point de vue des germes de difféomorphismes locaux, on obtient, en considérant les solutions du majorant, un groupoïde ensembliste qui contient les éléments de la dynamique du système, et qui contient aussi les solutions du D-groupoïde de Galois. Cependant, il contient peut-être plus de solutions que le D-groupoïde de Galois.

On rappelle que la dynamique $Dyn(F)$ d'un système aux q-différences $X(qz) = F(z, X(z))$ *a priori* non linéaire de taille n est le groupoïde ensembliste sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ engendré par les difféomorphismes locaux de la forme $(z, X) \mapsto (qz, F(z, X))$. Aussi, les éléments de $Dyn(F)$ sont de la

[2] Dans [**?**], les D-groupoïdes considérés proviennent toujours de groupoïdes d'invariance de structures différentielles. D'ailleurs, Casale montre dans [**?**] que tout D-groupoïde transitif sur un disque de $\mathbb{C}^n$ est le groupoïde d'invariance d'une famille de structures géométriques méromorphes.
Dans cette thèse, nous n'avons pas adopté ce point de vue parce que, contrairement au cas différentiel pour lequel des structures géométriques naturelles interviennent (feuilletage par exemple), les équations aux q-différences ne définissent *a priori* pas de structure géométrique déjà identifiée.
On pourrait *a posteriori* définir les structures géométriques sous-jacentes aux D-groupoïdes qui interviennent dans ce travail. Cependant, cette information correspond essentiellement à la donnée d'un générateur différentiel du D-groupoïde.

forme

$$(z, X) \mapsto (q^k z, \star)$$

La première composante de ces difféomorphismes locaux est indépendante de la variable X et dépend linéairement de la variable z. Aussi, on a la :

Proposition 3.1.1. *Le D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{Q}'}$ engendré sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ par le groupoïde d'ordre 2 :*

$$\mathcal{Q}_2 = \left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial X}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} z - \bar{z}, \partial^2 \bar{z} \right\rangle \subset \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}$$

est un majorant, dans le sens de la définition 1.2.43, du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(F)$ d'un système aux q-différences $X(qz) = F(z, X(z))$ de taille n.
Ses solutions $sol(\sqrt{\mathcal{Q}'})$ sont les germes des difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \bar{X}(z, X))$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\bar{X}$ quelconque.

Démonstration. On a montré dans la partie 1.2.2 du chapitre 1 que l'idéal $\mathcal{Q}_2$ est un groupoïde d'ordre 2 sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. Ses solutions sont les germes des difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \bar{X}(z, X))$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\bar{X}$ quelconque, et contiennent donc les éléments de la dynamique $Dyn(F)$ du système. Aussi, le D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{Q}'}$ engendré sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ par $\mathcal{Q}_2$ est un majorant du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(F)$. □

On a :

$$\sqrt{\mathcal{Q}'} \subset \mathcal{G}al(F)$$

et

$$Dyn(F) \subset sol(\mathcal{G}al(F)) \subset sol(\sqrt{\mathcal{Q}'})$$

3.2 Le majorant $\sqrt{\mathcal{L}in'}$

Une équation différentielle linéaire définit sur l'espace des phases un feuilletage avec structure linéaire transverse. Le groupoïde d'invariance de cette structure engendre un D-groupoïde sur cet espace, qui est un majorant du D-groupoïde de Galois.

De façon analogue, on propose ici un majorant naturel pour le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire. Il rend compte de la forme particulière des éléments de la dynamique d'un tel système.
On décrira les propriétés du D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire que ce majorant permet de mettre en évidence.

Pour cette partie, on considère un système aux q-différences linéaire rationnel $X(qz) = A(z)X(z)$, avec $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$.

3.2.1 Le majorant $\sqrt{\mathcal{L}in'}$

Selon la définition 2.2.1, les éléments de la dynamique $Dyn(A(z))$ du système aux q-différences linéaire $X(qz) = A(z)X(z)$ sont les germes des difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme

$$(z, X) \mapsto (q^k z, A_k(z)X)$$

La première composante de ces difféomorphismes est indépendante de la variable X et dépend linéairement de la variable z. La deuxième composante de ces difféomorphismes est linéaire par rapport à la variable X. Aussi, on a la :

Proposition 3.2.1. *Le D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{L}in'}$ engendré sur $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ par le groupoïde d'ordre 2 :*

$$\mathcal{L}in_2 = \left\langle \frac{\partial\bar{z}}{\partial X}, \frac{\partial\bar{z}}{\partial z}z-\bar{z}, \partial^2\bar{z}, \frac{\partial\bar{X}}{\partial X}X-\bar{X}, \frac{\partial^2\bar{X}}{\partial X^2}\right\rangle \subset \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}$$

est un majorant, dans le sens de la définition 1.2.43*, du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A(z))$ du système aux q-différences $X(qz)=A(z)X(z)$.*
Ses solutions $sol(\sqrt{\mathcal{L}in'})$ sont les germes des difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ de la forme $(z,X)\mapsto(\alpha z,\beta(z)X)$, avec $\alpha\in\mathbb{C}^*$ et localement, $\beta(z)\in GL_n(\mathbb{C})$ pour tout z.

Démonstration. On a montré dans la partie 1.2.2 du chapitre 1 que $\mathcal{Q}_2$ est un groupoïde d'ordre 2. On montre de façon analogue que les générateurs $\frac{\partial\bar{X}}{\partial X}X-\bar{X}$ et $\frac{\partial^2\bar{X}}{\partial X^2}$ de $\mathcal{L}in_2$ vérifient les conditions *(i)*, *(ii)* et *(iii)* de la définition 1.2.23. Aussi, l'idéal $\mathcal{L}in_2$ de $\mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}$ est un groupoïde d'ordre 2 sur $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$.
Les solutions de $\mathcal{L}in_2$ sont les germes des difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ de la forme $(z,X)\mapsto(\alpha z,\beta(z)X)$, avec $\alpha\in\mathbb{C}^*$ et localement, $\beta(z)\in GL_n(\mathbb{C})$ pour tout z. Elles contiennent donc les éléments de la dynamique $Dyn(A(z))$. Le D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{L}in'}$ engendré par $\mathcal{L}in_2$ sur $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ est donc un majorant du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A(z))$. □

On a :

$$\sqrt{\mathcal{Q}'}\subset\sqrt{\mathcal{L}in'}\subset\mathcal{G}al(A(z))$$

et

$$Dyn(A(z))\subset sol(\mathcal{G}al(A(z)))\subset sol(\sqrt{\mathcal{L}in'})\subset sol(\sqrt{\mathcal{Q}'})$$

Remarque 3.2.2. On considère une solution convergente de $\sqrt{\mathcal{L}in'}$, c'est-à-dire, précisément, un germe en un point $a=(z_a,X_a)\in P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ d'un difféomorphisme local g de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ de la forme $(z,X)\mapsto(\alpha z,\beta(z)X)$. On considère un voisinage ouvert Δ de z_a dans $P^1\mathbb{C}$ sur lequel la matrice β est bien définie et inversible, c'est-à-dire sur lequel β se prolonge en une matrice $\beta\in GL_n(\mathcal{O}(\Delta))$. On considère les « tubes » $T_s=\Delta\times\mathbb{C}^n$ et $T_t=\alpha\Delta\times\mathbb{C}^n$ de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$, et le difféomorphisme $\tilde{g}:T_s\to T_t$ bien défini par $(z,X)\to(\alpha z,\beta(z)X)$.
Alors, d'après la proposition 3.2.1 précédente, tout germe de $\tilde{g}$ en un point quelconque de T_s est encore, de par sa forme, une solution du D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{L}in'}$. La solution g est donc naturellement définie au voisinage de la transversale $\{z_a\}\times\mathbb{C}^n$ de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$.

Aussi, les solutions de $\sqrt{\mathcal{L}in'}$ sont naturellement définies au voisinage de « transversales » de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$.

3.2.2 Réduction des équations de $\mathcal{G}al(A(z))$ modulo $\sqrt{\mathcal{L}in'}$

Le majorant $\sqrt{\mathcal{L}in'}$ du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A(z))$ est engendré par des équations très simples. Cela permet de réduire modulo $\sqrt{\mathcal{L}in'}$ les équations de $\mathcal{G}al(A(z))$ à des équations ne dépendant plus que de certaines variables.

Proposition 3.2.3. *Soit $(a,b)\in(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)\times(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)$. Soit un entier $r\geq 2$. Pour toute équation $E\in(\mathcal{G}al(A(z))_r)_{(a,b)}$, il existe un inversible $u\in(\mathcal{O}_{J_r^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)})^\times_{(a,b)}$, une équation $L\in((\sqrt{\mathcal{L}in'})_r)_{(a,b)}$, et une équation $E_1\in(\mathcal{G}al(A(z))_r)_{(a,b)}$ ne dépendant que des variables indiquées ci-dessous, tels que :*

$$uE = L + E_1(z, X, \frac{\partial\bar{z}}{\partial z}, \frac{\partial\bar{X}}{\partial X}, \frac{\partial^2\bar{X}}{\partial z\partial X}, \dots \frac{\partial^r\bar{X}}{\partial z^{r-1}\partial X})$$

Démonstration. Soit E une équation de $(\mathcal{G}al(A(z))_r)_{(a,b)}$. L'équation E est donc un élément de l'anneau

$$\mathbb{C}\left\{z-z_a, X-X_a, \bar{z}-z_b, \bar{X}-X_b\right\}\left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial X}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial X}, \delta^{-1}, \partial^2\bar{z}, \partial^2\bar{X}, \ldots, \partial^r\bar{z}, \partial^r\bar{X}\right]$$

On rappelle que δ représente le jacobien des jets donc c'est un polynôme en les coordonnées qui représentent les dérivées partielles d'ordre 1 des jets. Soit donc u une puissance de δ de sorte que uE n'ait pas de puissance de δ au dénominateur.
Ensuite, on effectue les divisions euclidiennes successives de uE puis de ses restes par les polynômes unitaires $\partial^{2+s}\bar{z}$ et $\frac{\partial^{2+s}\bar{X}}{\partial(z,X)^s\partial X^2}$ pour $s \geq 0$, puis par les polynômes $\frac{\partial \bar{z}}{\partial X}$ et $\frac{\partial \bar{X}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial z \partial X}X$. On obtient une équation $E' \in (\mathcal{G}al(A(z))_r)_{(a,b)}$ telle que $uE \equiv E' \mod ((\sqrt{\mathcal{L}in'})_r)_{(a,b)}$ et E' ne dépend plus que des variables $z, X, \bar{z}, \bar{X}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial X}, \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial z \partial X}, \ldots, \frac{\partial^r \bar{X}}{\partial z^{r-1}\partial X}$.
On effectue successivement les divisions de Weierstrass (données par le lemme 1.2.29) de E' puis de ses restes par les polynômes $\bar{z} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}z$ et $\bar{X} - \frac{\partial \bar{X}}{\partial X}X$. On obtient une équation $E_1 \in (\mathcal{G}al(A(z))_r)_{(a,b)}$ telle que $E' \equiv E_1 \mod ((\sqrt{\mathcal{L}in'})_r)_{(a,b)}$ et E_1 ne dépend plus que des variables

$$z, X, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial X}, \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial z \partial X}, \frac{\partial^3 \bar{X}}{\partial z^2 \partial X}, \ldots, \frac{\partial^r \bar{X}}{\partial z^{r-1}\partial X}$$

□

3.2.3 Les solutions de $\mathcal{G}al(A(z))$

Toute solution convergente de $\mathcal{G}al(A(z))$ est une solution convergente de $\sqrt{\mathcal{L}in'}$. On va montrer que les solutions de $\mathcal{G}al(A(z))$ sont, comme les solutions de $\sqrt{\mathcal{L}in'}$, naturellement définies au voisinage de « transversales » de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$.

Soit $(a,b) = (z_a, X_a, z_b, X_b) \in (P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)^2$. Un germe en (a,b) de solution convergente de $\mathcal{G}al(A(z))$ est la donnée d'un germe de difféomorphisme local $g : (P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, a) \to (P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, b)$ tel que pour toute équation $E \in \mathcal{G}al(A(z))_{(a,b)}$, on a $E(y, g(y), \frac{\partial g}{\partial y}(y), \ldots) = 0$ sur un voisinage de a dans $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$.

D'après la proposition 3.2.1, le difféomorphisme local g est de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \beta(z)X)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in GL_n(\mathbb{C}\{z - z_a\})$.
On considère un voisinage ouvert connexe Δ de z_a sur lequel la matrice β est bien définie et inversible, c'est-à-dire sur lequel β se prolonge en une matrice $\beta \in GL_n(\mathcal{O}(\Delta))$.
On considère les « tubes » $T_s = \Delta \times \mathbb{C}^n$ et $T_t = \alpha\Delta \times \mathbb{C}^n$ de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, et le difféomorphisme $\tilde{g} : T_s \to T_t$ défini par $(z, X) \to (\alpha z, \beta(z)X)$.

Proposition 3.2.4. *Les germes en tous les points de T_s du difféomorphisme $\tilde{g}$ sont des solutions convergentes du D-groupoïde $\mathcal{G}al(A(z))$.*

Démonstration. L'idéal $\mathcal{G}al(A(z))$ est un D-groupoïde donc par définition, pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'idéal $\mathcal{G}al(A(z))_r$ de $\mathcal{O}_{J_r^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}$ est cohérent. Aussi, pour tout point $(y_0, \bar{y}_0) \in (P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)^2$, il existe un voisinage ouvert Ω de $(y_0, \bar{y}_0)$ dans $(P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)^2$ sur lequel on a une suite exacte de $\left(\mathcal{O}_{J_r^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}\right)_{|\Omega}$-modules de la forme

$$\left(\mathcal{O}_{J_r^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}\right)^l_{|\Omega} \to \mathcal{G}al(A(z))_r \to 0$$

Il existe donc des équations $E_1^\Omega, \ldots, E_l^\Omega$ de $\mathcal{G}al(A(z))_r$ définies sur l'ouvert Ω telles que

$$(\mathcal{G}al(A(z))_r)_{|\Omega} = \left(\mathcal{O}_{J_r^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}\right)_{|\Omega} E_1^\Omega + \cdots + \left(\mathcal{O}_{J_r^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}\right)_{|\Omega} E_l^\Omega$$

Soit $a_1 \in T_s = \Delta \times \mathbb{C}^n$. Soit $\gamma : [0,1] \to T_s$ un chemin dans T_s tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = a_1$. Soit $\{\Omega_0, \ldots, \Omega_N\}$ un recouvrement fini du chemin $\gamma([0,1]) \times \tilde{g}(\gamma([0,1]))$ par des ouverts connexes $\Omega \subset (T_s \times T_t)$ comme ci-dessus.
On suppose que l'ouvert Ω_0 contient l'origine $(\gamma(0), g(\gamma(0))) = (a, b)$ du chemin. Les équations $E_1^{\Omega_0}, \ldots, E_{l_0}^{\Omega_0}$ sont donc vérifiées par la solution g, c'est-à-dire que $E_k^{\Omega_0}(y, g(y), \frac{\partial g}{\partial y}(y), \ldots) \equiv 0$ sur un voisinage de y_0. On a donc, par prolongement analytique, $E_k^{\Omega_0}(y, \tilde{g}(y), \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}(y), \ldots) \equiv 0$ sur la projection source de Ω_0. Aussi, les germes du difféomorphisme $\tilde{g}$ en tout point de Ω_0 sont solutions de la restriction de $\mathcal{G}al(A(z))_r$ à Ω_0.
De proche en proche, on obtient que les germes du difféomorphisme $\tilde{g}$ en tout point de Ω_k sont solutions des restrictions de $\mathcal{G}al(A(z))_r$ aux ouverts Ω_k et donc, en particulier, le germe de $\tilde{g}$ au point a_1 est solution de $\mathcal{G}al(A(z))_r$. □

Théorème 3.2.5. *Toute solution du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A(z))$ d'un système aux q-différences linéaire $X(qz) = A(z)X(z)$, avec $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, est naturellement définie au voisinage d'une transversale de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$.*

3.3 Le D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales

Le calcul du majorant du D-groupoïde de Galois d'un système différentiel linéaire permet de montrer (*cf* [**?**] proposition 5.3.2. p. 495) que, dans des coordonnées redressantes pour le feuilletage, les solutions du D-groupoïde de Galois qui fixent les transversales sont les germes de difféomorphismes locaux de la forme $(z, X) \mapsto (z, \beta X)$, où β parcourt un groupe algébrique contenant la monodromie de l'équation.

Dans cette partie, on va considérer, pour un système aux q-différences, les solutions de son D-groupoïde de Galois qui fixent les transversales de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, et le munir d'une structure de D-groupoïde.
On va ensuite montrer que pour les systèmes aux q-différences linéaires, ce D-groupoïde permet d'associer à chaque transversale de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, un groupe de solutions candidat à redonner le groupe de Galois.
On illustrera ces nouvelles définitions sur quelques uns des exemples déjà considérés dans le chapitre 2 précédent.

3.3.1 Le D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales

Parmi les solutions du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(F)$ d'un système aux q-différences $X(qz) = F(z, X(z)$, les solutions qui fixent les transversales de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ sont celles qui vérifient l'équation $\bar{z} - z$. On introduit donc le D-groupoïde intersection, au sens du théorème 1.2.41, du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(F)$ et du D-groupoïde engendré par l'équation $\bar{z} - z$.

Précisons d'abord en quoi l'équation $\bar{z} - z$ engendre un D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. On a : $c^*(\bar{z} - z) = \bar{\bar{z}} - z = (\bar{\bar{z}} - \bar{z}) + (\bar{z} - z)$, $e^*(\bar{z} - z) = z - z = 0$ et $i(\bar{z} - z) = z - \bar{z}$. Aussi, l'idéal de $\mathcal{O}_{J_0^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}$ engendré par l'équation $\bar{z} - z$ est un groupoïde d'ordre 0. On peut donc considérer le D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ engendré par le groupoïde $\langle \bar{z} - z \rangle$ d'ordre 0. On notera $\sqrt{\langle \bar{z} - z \rangle'}$ ce D-groupoïde. Ses solutions sont les germes des difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme $(z, X) \mapsto (z, \bar{X}(z, X))$, avec $\bar{X}$ quelconque, c'est-à-dire les germes de difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ qui fixent les transversales.

Définition 3.3.1. *Soit $\mathcal{G}al(F)$ le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences $X(qz) = F(z, X(z))$. On appellera D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales, le D-groupoïde in-*

tersection, au sens du théorème 1.2.41*, du D-groupoïde $\mathcal{G}al(F)$ et du D-groupoïde engendré sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ par l'équation $\bar{z} - z$. On notera $\widetilde{\mathcal{G}al}(F)$ ce D-groupoïde intersection.*

On a :

$$\mathcal{G}al(F) \subset \widetilde{\mathcal{G}al}(F)$$

et

$$sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(F)) \subset sol(\mathcal{G}al(F))$$

donc le D-groupoïde $\widetilde{\mathcal{G}al}(F)$ est un D-sous-groupoïde (du point de vue des solutions) du D-groupoïde $\mathcal{G}al(F)$. Les solutions de $\widetilde{\mathcal{G}al}(F)$ sont exactement les solutions de $\mathcal{G}al$ qui fixent les transversales.

Pour un système aux q-différences, et contrairement au cas différentiel[3], les seuls éléments de la dynamique $Dyn(F)$ qui fixent les transversales, et qui sont donc des solutions de $\widetilde{\mathcal{G}al}(F)$, sont les germes de l'application identité. Aussi, on a

$$sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(F)) \cap Dyn(F) = \{id\}$$

3.3.2 Groupes de solutions de $\widetilde{\mathcal{G}al}(A(z))$

Soit $X(qz) = A(z)X(z)$ un système aux q-différences linéaire rationnel. Les solutions de son D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A(z))$ sont, d'après la proposition 3.2.1, de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \beta(z)X)$ et sont, d'après le théorème 3.2.5, définies au voisinage de transversales de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$.
D'après la définition 3.3.1, les solutions du D-sous-groupoïde de Galois $\widetilde{\mathcal{G}al}(A(z))$ qui fixe les transversales, sont les solutions de $\mathcal{G}al(A(z))$ pour lesquelles $\alpha = 1$.

Proposition 3.3.2. *Soit $z_0 \in P^1\mathbb{C}$. Les solutions de $\widetilde{\mathcal{G}al}(A(z))$ définies au voisinage de la transversale $\{z_0\} \times \mathbb{C}^n$ forment un groupe qui s'identifie à un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C}\{z - z_0\})$.*

Démonstration. Toute solution de $\widetilde{\mathcal{G}al}(A(z))$ définie au voisinage de la transversale $\{z_0\} \times \mathbb{C}^n$ est de la forme $(z, X) \mapsto (z, \beta(z)X)$, avec $\beta \in GL_n(\mathbb{C}\{z - z_0\})$. On va montrer que la structure de groupoïde ensembliste de $sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(A(z)))$ d'une part, et le majorant $\sqrt{\mathcal{L}in'}$ d'autre part, assurent que l'ensemble des solutions de $\widetilde{\mathcal{G}al}(A(z))$ définies au voisinage de la transversale $\{z_0\} \times \mathbb{C}^n$ forment un groupe.
Montrons la stabilité par composition des solutions de $\widetilde{\mathcal{G}al}(A(z))$ définies au voisinage de la transversale $\{z_0\} \times \mathbb{C}^n$. Soient $(z, X) \mapsto (z, \beta_1(z)X)$ et $(z, X) \mapsto (z, \beta_2(z)X)$ deux solutions de $\widetilde{\mathcal{G}al}(A(z))$ définies au voisinage de la transversale $\{z_0\} \times \mathbb{C}^n$. Alors les germes en $(z_0, 0)$ de ces applications sont des solutions de $\widetilde{\mathcal{G}al}(A(z))$ et fixent $(z_0, 0)$. On peut donc composer ces germes et on obtient le germe en $(z_0, 0)$ de l'application $(z, X) \mapsto (z, \beta_2(z)\beta_1(z)X)$.
La propriété 1.2.37 assure que $sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(A(z)))$ est un groupoïde ensembliste. Aussi, le germe en $(z_0, 0)$ de l'application $(z, X) \mapsto (z, \beta_2(z)\beta_1(z)X)$ est encore un germe de solution de $\widetilde{\mathcal{G}al}(A(z))$.
A fortiori, ce germe est une solution de $\mathcal{G}al(A(z))$ et s'étend, d'après la proposition 3.2.4, en une solution de $\mathcal{G}al(A(z))$ définie au voisinage de la transversale $\{z_0\} \times \mathbb{C}^n$. Cette extension reste une solution de l'équation $\bar{z} - z$. Aussi, le difféomorphisme local $(z, X) \mapsto (z, \beta_2(z)\beta_1(z)X)$ est une solution de $\widetilde{\mathcal{G}al}(A(z))$ définie au voisinage de la transversale $\{z_0\} \times \mathbb{C}^n$.
La preuve de la stabilité par inversion est similaire.
Les solutions de $\widetilde{\mathcal{G}al}(A(z))$ définies au voisinage de la transversale $\{z_0\} \times \mathbb{C}^n$ forment donc un groupe et les matrices β qui les définissent forment un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C}\{z - z_0\})$. □

[3] Les transformations d'holonomie qui préservent les transversales du feuilletage correspondent à la monodromie du système.

Définition 3.3.3. *Le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C}\{z-z_0\})$ défini par la proposition 3.3.2 précédente sera appelé groupe de solutions au-dessus de z_0, ou groupe de solutions associé à la transversale $\{z_0\}\times\mathbb{C}^n$ et sera noté $Sol_{z_0}(\widetilde{\mathcal{G}al}(A(z)))$.*

3.3.3 Exemples

Nous allons calculer le D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales de systèmes aux q-différences linéaires déjà considérés dans le chapitre 2. On calculera aussi le groupe de solutions associé à chaque transversale.

L'équation des constantes $x(qz) = x(z)$

Proposition 3.3.4. *Pour l'équation des constantes $x(qz) = x(z)$, le D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales est $\widetilde{\mathcal{G}al}(1) = \ker e^*$.*
Ses solutions sont les germes de l'application identité de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.
Pour tout point $z_0 \in P^1\mathbb{C}$, le groupe de solutions $Sol_{z_0}(\widetilde{\mathcal{G}al}(1))$ associé à la transversale $\{z_0\}\times\mathbb{C}$ est réduit à $\{1\}\subset\mathbb{C}^*\subset GL_1(\mathbb{C}\{z-z_0\})$.

Démonstration. L'équation $\bar{x}-x$ est dans $\mathcal{G}al(1)$ donc les équations $\bar{x}-x$ et $\bar{z}-z$ sont dans $\widetilde{\mathcal{G}al}(1)$. Aussi, étant donné les générateurs de $\ker e^*$ exhibés à la proposition 1.2.30, et parce que $\widetilde{\mathcal{G}al}(1)$ est un idéal différentiel, on a l'inclusion $\ker e^*\subset\widetilde{\mathcal{G}al}(1)$. D'autre part, l'idéal $\widetilde{\mathcal{G}al}(1)$ est un D-groupoïde donc, d'après la définition 1.2.35, on a l'inclusion $\widetilde{\mathcal{G}al}(1)\subset\ker e^*$.
Les solutions de $\widetilde{\mathcal{G}al}(1) = \ker e^*$ sont, toujours d'après la proposition 1.2.30, les germes de l'applications identité. Aussi, pour tout point $z_0\in P^1\mathbb{C}$, le groupe de solutions associé à la transversale $\{z_0\}\times\mathbb{C}$ est réduit à $\{1\}\subset\mathbb{C}^*\subset GL_1(\mathbb{C}\{z-z_0\})$. □

L'équation $x(qz) = q^l x(z)$ du caractère z^l, avec $l\in\mathbb{Z}$

Proposition 3.3.5. *Pour l'équation $x(qz) = q^l x(z)$, le D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales est $\widetilde{\mathcal{G}al}(q^l) = \ker e^*$.*[4]
Ses solutions sont les germes de l'application identité de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.
Pour tout point $z_0\in P^1\mathbb{C}$, le groupe de solutions $Sol_{z_0}(\widetilde{\mathcal{G}al}(q^l))$ associé à la transversale $\{z_0\}\times\mathbb{C}$ est réduit à $\{1\}\subset\mathbb{C}^*\subset GL_1(\mathbb{C}\{z-z_0\})$.

Démonstration. Le D-groupoïde $\widetilde{\mathcal{G}al}(q^l)$ contient l'équation $\bar{z}-z$, et donc, par dérivation, l'équation $\frac{\partial\bar{z}}{\partial z}-1$. D'autre part, il contient l'équation $(\frac{\partial\bar{z}}{\partial z})^l-\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}$. Par division euclidienne de cette dernière équation par le polynôme unitaire $\frac{\partial\bar{z}}{\partial z}-1$, on obtient dans $\widetilde{\mathcal{G}al}(q^l)$ l'équation $1-\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}$.
D'autre part, on a aussi dans $\widetilde{\mathcal{G}al}(q^l)$ l'équation $\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}x-\bar{x}$, et donc par division euclidienne de cette dernière par le polynôme unitaire $\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}-1$, on obtient dans $\widetilde{\mathcal{G}al}(q^l)$ l'équation $\bar{x}-x$. On conclut ensuite comme dans la preuve de la proposition 3.3.4 ci-dessus. □

L'équation des caractères $x(qz) = ax(z)$, avec $a\in\mathbb{C}^*$

On reprend, sans les écrire de nouveau, les notations qui suivent la proposition 2.3.5 et qui permettent de la préciser, selon que $a\in\mu_\infty q^{\mathbb{Z}}$ ou que $a\notin\mu_\infty q^{\mathbb{Z}}$.

On suppose d'abord que $a\notin\mu_\infty q^{\mathbb{Z}}$.

[4] L'équation aux q-différences $\sigma_q x = q^l x$ est rationnellement équivalente, *via* la transformation de jauge z^l de 1 vers q^l, à l'équation aux q-différences $\sigma_q x = x$. Elles ont le même D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales. On discutera au chapitre 5 de l'effet d'une transformation de jauge sur le D-groupoïde de Galois, et sur le D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales, d'un système aux q-différences linéaire.

Proposition 3.3.6. *Pour l'équation des caractères $x(qz) = ax(z)$, avec $a \notin \mu_\infty q^{\mathbb{Z}}$, le D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales est le D-groupoïde $\widetilde{\mathcal{G}al}(a)$ engendré par le groupoïde d'ordre 2 :*

$$\left\langle \bar{z} - z, \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - 1, \partial^2 \bar{z}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} x - \bar{x}, \partial^2 \bar{x} \right\rangle \subset \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$$

Ses solutions $sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(a))$ sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la forme $(z, x) \mapsto (z, \beta x)$, avec $\beta \in \mathbb{C}^*$.
Pour tout point $z_0 \in P^1\mathbb{C}$, le groupe de solutions $Sol_{z_0}(\widetilde{\mathcal{G}al}(a))$ associé à la transversale $\{z_0\} \times \mathbb{C}$ est le groupe $\mathbb{C}^* \subset GL_1(\mathbb{C}\{z - z_0\})$.

Démonstration. D'après la proposition 2.3.5, toutes les équations génératrices $\frac{\partial \bar{x}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} x - \bar{x}, \partial^2 \bar{x}$ proposées ci-dessus sont dans $\mathcal{G}al(a)$.
Si $a \notin \mu q^{\mathbb{Z}}$, le $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{R}_a$ est réduit à $\{(0, 0)\}$. Aussi, réciproquement, toutes les équations génératrices de $\mathcal{G}al(a)$ données dans la proposition 2.3.5 se réduisent, modulo $\sqrt{\langle \bar{z} - z \rangle'}$, en l'une des équations de la proposition 3.3.6 proposées ci-dessus.
Ces remarques suffisent à assurer que l'idéal différentiel réduit de $\mathcal{O}_{J^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$ engendré par les équations proposées est l'idéal différentiel $\widetilde{\mathcal{G}al}(a)$ (et donc un D-groupoïde).
On peut aussi vérifier facilement que l'idéal de $\mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$ engendré par les équations proposées est un groupoïde d'ordre 2. □

On suppose maintenant que $a \in \mu_\infty q^{\mathbb{Z}}$. On reprend, sans les écrire de nouveau, les notations qui suivent la proposition 2.3.5.

Proposition 3.3.7. *Pour l'équation des caractères $x(qz) = ax(z)$, avec $a \in \mu q^{\mathbb{Z}}$, le D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales est le D-groupoïde $\widetilde{\mathcal{G}al}(a)$ engendré par le groupoïde d'ordre 2 :*

$$\left\langle \bar{z} - z, \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - 1, \partial^2 \bar{z}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} x - \bar{x}, \partial^2 \bar{x}, (\frac{\partial \bar{x}}{\partial x})^{q_a d'} - 1 \right\rangle \subset \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$$

Ses solutions $sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(a))$ sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la forme $(z, x) \mapsto (z, ux)$, avec u une racine $(q_a d')$-ème de l'unité.
Pour tout point $z_0 \in P^1\mathbb{C}$, le groupe de solutions $Sol_{z_0}(\widetilde{\mathcal{G}al}(a))$ associé à la transversale $\{z_0\} \times \mathbb{C}$ est le groupe $\mu_{q_a d'} \subset \mathbb{C}^* \subset GL_1(\mathbb{C}\{z - z_0\})$ des racines $(q_a d')$-èmes de l'unité.

Démonstration. On a $\mathcal{R}_a = \mathbb{Z}(p_a d', q_a d')$ donc pour $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathcal{R}_a$, l'équation $(\frac{\partial \bar{z}}{\partial z})^{\lambda_0} - (\frac{\partial \bar{x}}{\partial x})^{\lambda_1}$ est un multiple de l'équation $(\frac{\partial \bar{z}}{\partial z})^{p_a d'} - (\frac{\partial \bar{x}}{\partial x})^{q_a d'}$. De plus, on a la relation de congruence

$$\left((\frac{\partial \bar{z}}{\partial z})^{p_a d'} - (\frac{\partial \bar{x}}{\partial x})^{q_a d'} \right) \equiv \left(1 - (\frac{\partial \bar{x}}{\partial x})^{q_a d'} \right) \mod \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - 1 \right)$$

Grâce à cette remarque, un raisonnement similaire à celui de la preuve de la proposition 3.3.6 précédente permet de conclure. □

Le système du logarithme $X(qz) = LX(z)$

Le système du logarithme $X(qz) = LX(z)$, avec $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est obtenu par linéarisation de l'équation du logarithme $x(qz) = x(z) + 1$.

Proposition 3.3.8. *Pour le système du logarithme $X(qz) = LX(z)$, le D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales est le D-groupoïde $\widetilde{\mathcal{G}al}(L)$ engendré par le groupoïde d'ordre 2 :*

$$\left\langle \bar{z} - z, \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} - 1, \partial^2 \bar{z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} X - \bar{X}, \partial^2 \bar{X}, \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial X_1} - \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial X_1} - 1, \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial X_1}, \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial X_1} - 1 \right\rangle$$

$\subset \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2)}$.
Ses solutions $sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(L))$ *sont les germes des difféomorphismes de* $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2$ *de la forme* $(z,X)\mapsto (z, \begin{pmatrix} 1+\beta & -\beta \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} X)$, *avec* $\beta\in\mathbb{C}$.
Pour tout point $z_0\in P^1\mathbb{C}$, *le groupe de solutions* $Sol_{z_0}(\widetilde{\mathcal{G}al}(L))$ *associé à la transversale* $\{z_0\}\times\mathbb{C}^2$ *est le groupe additif*

$$\left\{\begin{pmatrix} 1+\beta & -\beta \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}; \beta\in\mathbb{C}\right\} \subset GL_2(\mathbb{C}) \subset GL_2(\mathbb{C}\{z-z_0\})$$

Démonstration. La preuve est similaire à la preuve de la proposition 3.3.6. □

Les systèmes aux q-différences que l'on vient de considérer sont des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants. On constate déjà pour chacun de ces exemples que les groupes de solutions associés à chaque transversale sont indépendants de la transversale, qu'ils forment un groupe algébrique de matrices constantes, et que ce groupe coïncide avec le groupe de Galois du système considéré (*cf* [**?**], ou [**?**], ou les rappels de la partie 4.3.2 du chapitre 4 suivant).
Ces résultats seront retrouvés dans le chapitre 4, dans lequel on calculera en toute généralité le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants, et on le comparera au groupe de Galois.

L'équation $x(qz) = -qzx(z)$ **de** θ_q

On reprend les notations et les remarques de la partie 2.3.2. La remarque ci-dessous suppose (et bien que je n'aie pas réussi à le montrer) que l'idéal $\mathcal{T}_3$ est un groupoïde d'ordre 3.

Remarque 3.3.9. En admettant que l'idéal $\mathcal{T}_3$ est un groupoïde d'ordre 3 (ce que je conjecture), on peut montrer que les groupes de solutions $Sol_{z_0}(\widetilde{\mathcal{G}al}(-qz))$, pour $z_0\in\mathbb{C}^*$, sont des sous-groupes du groupe $\{\beta z^\gamma; \beta\in\mathbb{C}^*, \gamma\in\mathbb{C}\}\subset GL_1(\mathbb{C}\{z-z_0\})$, et qu'il existe un point $z_0\in\mathbb{C}^*$ pour lequel le groupe $Sol_{z_0}(\widetilde{\mathcal{G}al}(-qz))$ contient des éléments non constants.

Démonstration. On suppose que l'idéal $\mathcal{T}_3$ est un groupoïde d'ordre 3. Alors, le D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{T}_3'}$ engendré par $\mathcal{T}_3$ est un majorant (du point de vue des solutions) du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(-qz)$.

- Si $\mathcal{G}al(-qz) = \sqrt{\mathcal{T}_3'}$, alors le D-sous-groupoïde de Galois $\widetilde{\mathcal{G}al}(-qz)$ qui fixe le transversales est le D-groupoïde engendré sur $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ par le groupoïde d'ordre 3 :

$$\left\langle \bar z - z, \frac{\partial\bar z}{\partial x}, \frac{\partial\bar z}{\partial z} - 1, \partial^2\bar z, \frac{\partial^2\bar x}{\partial x^2}, \frac{\partial\bar x}{\partial x}x - \bar x, \frac{\partial^2\bar x}{\partial z\partial x}\frac{\partial\bar x}{\partial x} + z\frac{\partial^3\bar x}{\partial z^2\partial x}\frac{\partial\bar x}{\partial x} - z\left(\frac{\partial^2\bar x}{\partial z\partial x}\right)^2\right\rangle$$

$\subset \mathcal{O}_{J_3^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$.
Ses solutions $sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(-qz))$ sont donc les germes de difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ de la forme $(z,x)\mapsto(z,\beta z^\gamma x)$, avec $\beta\in\mathbb{C}^*$ et $\gamma\in\mathbb{C}$.
Pour tout point $z_0\in\mathbb{C}^*$, le groupe des solutions $Sol_{z_0}(\widetilde{\mathcal{G}al}(-qz))$ associé à la transversale $\{z_0\}\times\mathbb{C}$ est le sous-groupe $\{\beta z^\gamma; \beta\in\mathbb{C}^*, \gamma\in\mathbb{C}\}\subset GL_1(\mathbb{C}\{z-z_0\})$. Lee groupe des solutions associés aux transversales $\{0\}\times\mathbb{C}$ et $\{\infty\}\times\mathbb{C}$ sont $\mathbb{C}^*\subset GL_1(\mathbb{C}\{z-z_0\})$.

- Si le D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{T}_3'}$ est un majorant strict du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(-qz)$, alors il existe une transversale $\{z_0\}\times\mathbb{C}$ pour laquelle le groupe transverse associé est un sous-groupe de $\{\beta z^\gamma; \beta\in\mathbb{C}^*, \gamma\in\mathbb{C}\}$, mais n'est pas un groupe d'éléments constants. En effet, l'équation $\frac{\partial\bar x}{\partial z}$ serait sinon un élément de $\widetilde{\mathcal{G}al}(-qz)$ et donc nécessairement dans $\mathcal{G}al(-qz) + \sqrt{\langle\bar z - z\rangle'}$. Ceci est impossible car les éléments de la dynamique $Dyn(-qz)$ ne sont pas tous solutions de l'équation $\frac{\partial\bar x}{\partial z}$. □

3.4 Le majorant $\sqrt{\mathcal{C}onst'}$

On va montrer qu'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants admet un majorant plus fin que le majorant $\sqrt{\mathcal{L}in'}$, ce qui permet de montrer que, pour un tel système, le groupe de solutions associé à chaque transversale de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ est un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$.

Jusqu'à la fin de ce chapitre, on considère un système aux q-différences linéaire à coefficients constants $X(qz) = AX(z)$, défini par une matrice constante $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

3.4.1 Le majorant $\sqrt{\mathcal{C}onst'}$

Selon l'exemple 2.2.2, les éléments de la dynamique $Dyn(A)$ du système aux q-différences linéaire à coefficients constants $X(qz) = AX(z)$ sont les germes des difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme

$$(z, X) \mapsto (q^k z, A^k X)$$

La première composante de ces difféomorphismes est indépendante de la variable X et dépend linéairement de la variable z. La deuxième composante de ces difféomorphismes est indépendante de la variable z et dépend linéairement de la variable X. Aussi, on a la :

Proposition 3.4.1. *Le D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{C}onst'}$ engendré sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ par le groupoïde d'ordre 2 :*

$$\mathcal{C}onst_2 = \left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial X}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} z - \bar{z}, \partial^2 \bar{z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} X - \bar{X}, \partial^2 \bar{X} \right\rangle \subset \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}$$

est un majorant, dans le sens de la définition 1.2.43, du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A)$ du système aux q-différences $X(qz) = AX(z)$.
Ses solutions $sol(\sqrt{\mathcal{C}onst'})$ sont les germes des difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \beta X)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in GL_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. On a montré dans la partie 1.2.2 du chapitre 1 que $\mathcal{Q}_2$ est un groupoïde d'ordre 2. On montre de façon analogue que les générateurs $\frac{\partial \bar{X}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} X - \bar{X}, \partial^2 \bar{X}$ de $\mathcal{C}onst_2$ vérifient les conditions *(i)*, *(ii)* et *(iii)* de la définition 1.2.23. Aussi, l'idéal $\mathcal{C}onst_2$ de $\mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}$ est un groupoïde d'ordre 2 sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$.
Les solutions de $\mathcal{C}onst_2$ sont les germes des difféomorphismes locaux de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \beta X)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in GL_n(\mathbb{C})$. Elles contiennent donc les éléments de la dynamique $Dyn(A)$. Le D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{C}onst'}$ engendré par $\mathcal{C}onst_2$ sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ est donc un majorant du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A)$. □

On a :

$$\sqrt{\mathcal{Q}'} \subset \sqrt{\mathcal{L}in'} \subset \sqrt{\mathcal{C}onst'} \subset \mathcal{G}al(A)$$

et

$$Dyn(A) \subset sol(\mathcal{G}al(A)) \subset sol(\sqrt{\mathcal{C}onst'}) \subset sol(\sqrt{\mathcal{L}in'}) \subset sol(\sqrt{\mathcal{Q}'})$$

3.4.2 Structure des groupes de solutions associés à chaque transversale

Le calcul du majorant $\sqrt{\mathcal{C}onst'}$ permet de montrer que, pour un système aux q-différences linéaires à coefficients constants, le groupe de solutions associé à chaque transversale de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ est un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$. C'est l'objet de la proposition 3.4.2 ci-dessous.

Proposition 3.4.2. *Soit $z_0 \in P^1\mathbb{C}$. Le groupe de solutions $Sol_{z_0}(\widetilde{\mathcal{G}al}(A))$ associé à la transversale $\{z_0\} \times \mathbb{C}^n$ est un sous-groupe algébrique affine complexe de $GL_n(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Soit $z_0 \in P^1\mathbb{C}$. D'après la proposition 3.4.1, les solutions de $\mathcal{G}al(A)$ sont des solutions de $\sqrt{\mathcal{C}onst'}$, et sont donc de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \beta X)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in GL_n(\mathbb{C})$ (et vérifient *a priori* plus de contraintes). Aussi, le groupe $Sol_{z_0}(\widetilde{\mathcal{G}al}(A))$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. On va montrer que les matrices qui constituent ce sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ correspondent au lieu d'annulation de polynômes de l'algèbre affine de $GL_n(\mathbb{C})$. Cela assurera, d'après la définition 1.2.15, que $Sol_{z_0}(\widetilde{\mathcal{G}al}(A))$ est un sous-groupe algébrique affine complexe de $GL_n(\mathbb{C})$.
On rappelle les inclusions

$$\sqrt{\mathcal{C}onst'} \subset \mathcal{G}al(A) \subset \widetilde{\mathcal{G}al}(A)$$

et

$$sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(A)) \subset sol(\mathcal{G}al(A)) \subset sol(\sqrt{\mathcal{C}onst'})$$

On peut vérifier, comme pour la proposition 3.2.4, que toute solution de $\sqrt{\langle \bar{z} - z \rangle'}$ est naturellement définie au voisinage d'une transversale de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, et donc, toute solution de $\widetilde{\mathcal{G}al}(A)$ est naturellement définie au voisinage d'une transversale de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. Aussi, les solutions de $\widetilde{\mathcal{G}al}(A)$ définies au voisinage de la transversale $\{z_0\} \times \mathbb{C}^n$ sont en correspondance bijective avec les germes en $(z_0, 0)$ de solutions des équations de la fibre $\widetilde{\mathcal{G}al}(A)_{(z_0,0,z_0,0)}$. On a :

$${}_{(\{z_0\}\times\mathbb{C}^n)}sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(A)) = {}_{(z_0,0)}sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(A)_{(z_0,0,z_0,0)})$$

On vérifie facilement que les solutions formelles et convergentes du D-groupoïde $\sqrt{\mathcal{C}onst'}$ coïncident, et que, par conséquent, les solutions formelles et convergentes de $\widetilde{\mathcal{G}al}(A)_{(z_0,0,z_0,0)}$ coïncident aussi. On a (en notant en indice à gauche le lieu en lequel l'on germifie) :

$${}_{(z_0,0)}sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(A)_{(z_0,0,z_0,0)}) = {}_{(z_0,0)}\widehat{sol}(\widetilde{\mathcal{G}al}(A)_{(z_0,0,z_0,0)})$$

Les équations $\partial^2\bar{z}$ et $\partial^2\bar{X}$ et toutes leurs dérivées sont dans $\sqrt{\mathcal{C}onst'}$ et donc dans $\widetilde{\mathcal{G}al}(A)_{(z_0,0,z_0,0)}$. Aussi, les solutions formelles de $\widetilde{\mathcal{G}al}(A)_{(z_0,0,z_0,0)}$ correspondent bijectivement aux solutions formelles d'ordre 1 de $(\widetilde{\mathcal{G}al}(A)_1)_{(z_0,0,z_0,0)}$. On a :

$${}_{(z_0,0)}\widehat{sol}(\widetilde{\mathcal{G}al}(A)_{(z_0,0,z_0,0)}) = {}_{(z_0,0)}\widehat{sol}_1(\widetilde{\mathcal{G}al}(A)_{(z_0,0,z_0,0)})$$

Une solution formelle d'ordre 1 de $(\widetilde{\mathcal{G}al}(A)_1)_{(z_0,0,z_0,0)}$ est un 1-jet de coordonnées

$$(z_0, 0, z_0, 0, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right), (\det \beta)^{-1})$$

telles que $E(z_0, 0, z_0, 0, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right), (\det \beta)^{-1}) = 0$ pour toute équation E de $(\widetilde{\mathcal{G}al}(A)_1)_{(z_0,0,z_0,0)}$.
Une solution formelle d'ordre 1 de $(\widetilde{\mathcal{G}al}(A)_1)_{(z_0,0,z_0,0)}$ est donc définie par une matrice $\beta \in GL_n(\mathbb{C})$ solution des équations polynomiales

$$E\left(z_0, 0, z_0, 0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} \end{pmatrix}, (\det \frac{\partial \bar{X}}{\partial X})^{-1}\right) \in \mathbb{C}\left[\frac{\partial \bar{X}}{\partial X}, (\det \frac{\partial \bar{X}}{\partial X})^{-1})\right]$$

avec E une équation de $(\widetilde{\mathcal{G}al}(A)_1)_{(z_0,0,z_0,0)}$.

□

On vient de montrer, grâce au calcul du majorant $\sqrt{\mathcal{C}onst'}$, que pour les systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants, les solutions du D-groupoïde de Galois qui fixent les transversales sont les germes de difféomorphismes locaux de la forme $(z, X) \mapsto (z, \beta X)$, où β parcourt un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$.

Cette situation est analogue à la situation obtenue pour un système différentiel linéaire (*cf* introduction de la partie 3.3).

Cependant, dans le cas différentiel, on obtient facilement, en considérant les transformations d'holonomie qui fixent les transversales du feuilletage, que ce groupe contient une réalisation du groupe de monodromie du système. C'est une remarque sur laquelle s'appuie la preuve de [**?**].
Dans le cas des systèmes aux q-différences, on a $sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(A)) \cap Dyn(A) = \{1\}$ et donc aucun élément non trivial des groupes de solutions tranverses ne correspond à un élément de la dynamique.

Le calcul explicite du D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences à coefficients constants, que l'on va faire dans le chapitre 4 suivant, va permettre de donner une interprétation de ces groupes.

Chapitre 4

Les systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants

Pour un système différentiel linéaire, les solutions du D-groupoïde de Galois qui fixent les transversales du feuilletage correspondent aux éléments d'un groupe algébrique qui contient la monodromie du système. Malgrange montre dans [**?**] que ce groupe est une réalisation du groupe de Galois différentiel du système.

Pour un système aux q-différences linéaire quelconque, les solutions du D-groupoïde de Galois qui fixent les transversales de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ ne donnent pas naturellement un groupe algébrique de matrices constantes. C'est seulement le cas pour les systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants. De plus, pour ces systèmes, les exemples considérés dans le chapitre 3 précédent indiquent que les groupes de solutions associés à chaque transversale donnent le groupe de Galois du système.

Dans ce chapitre, on va calculer le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants, et son D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales. On va constater que les groupes de solutions associés à chaque transversale sont des groupes algébriques de matrices constantes, indépendants de la transversale à laquelle ils sont associés.
On va ensuite montrer que le groupe transverse ainsi défini donne exactement une réalisation du groupe de Galois du système défini et décrit par Sauloy dans [**?**]. Plus qu'un groupe, la description de [**?**] met en évidence un groupoïde ensembliste avec lequel coïncident, on va le voir, toutes les solutions du D-groupoïde de Galois.

Nous commençons ce chapitre par rappeler les résultats de structure des sous-groupes algébriques monogènes de $GL_n(\mathbb{C})$.

Nous calculons ensuite le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants et son D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales. On décrira les sous-groupes algébriques monogènes de $GL_n(\mathbb{C})$ qui les déterminent.

Enfin, nous rappellons la description de [**?**] du groupe de Galois d'un tel système, et, grâce à cette description, nous comparons son D-groupoïde de Galois et son groupe de Galois.

4.1 Structure des sous-groupes algébriques monogènes de $GL_n(\mathbb{C})$

Le calcul du D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants, que l'on fera dans la partie 4.2 suivante, met en évidence un sous-groupe algébrique monogène de $GL_{n+1}(\mathbb{C})$. L'étude de la structure de ce sous-groupe permettra ensuite de comparer le D-groupoïde de Galois du système à son groupe de Galois.

L'objet de cette partie est donc de rappeler les résultats de structure des sous-groupes algébriques monogènes de $GL_n(\mathbb{C})$.

On reprend, sans les rappeler de nouveau, les définitions, exemples et notations introduits dans la partie 1.2.2 du chapitre 1. Pour simplifier, on dira aussi groupe algébrique pour groupe algébrique affine complexe.[1]
Les définitions et propriétés énoncées dans cette nouvelle partie sont, pour l'essentiel, reprises de [**?**] et ne seront pas toujours justifiées.

4.1.1 Les sous-groupes algébriques monogènes de $GL_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie, on va définir ce que l'on entend par sous-groupe algébrique monogène de $GL_n(\mathbb{C})$.

Propriété 4.1.1.
(a) Soit G un groupe algébrique affine complexe et soit H un sous-groupe de G. Alors, l'adhérence de Zariski $\bar{H}$ de H dans G est un sous-groupe algébrique de G.
(b) Soit G un groupe algébrique affine complexe. Soit $\{H^k\}_{k\in K}$ une famille de sous-groupes algébriques de G définis par les idéaux radiciels notés $I(H^k)$ de $\mathbb{C}[G]$. Alors, l'intersection $\cap_{k\in K} H^k$ est un sous-groupe algébrique de G. Il est défini par la racine de l'idéal $\sum_{k\in K} I(H^k)$ de $\mathbb{C}[G]$.
(c) Soit $B \in GL_n(\mathbb{C})$. L'adhérence de Zariski dans $GL_n(\mathbb{C})$ du sous-groupe monogène $\langle B\rangle = \{B^k\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$ de $GL_n(\mathbb{C})$ est le plus petit sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$ contenant B.

Démonstration.
(a) cf [**?**] p.54.
(b) L'intersection $\cap_{k\in K} H^k$ est un sous-groupe de G. Soit $A \in G$. Alors $A \in \cap_{k\in K} H^k \Leftrightarrow \forall\, k \in K,\ A \in H^k \Leftrightarrow \forall\, k \in K,\ \forall\, P \in I(H^k),\ P(A) = 0 \Leftrightarrow \forall\, P \in \sum_{k\in K} I(H^k),\ P(A) = 0$.
(c) Soit $G(B)$ le plus petit sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$ contenant B. Il est défini par la propriété *(b)*. Alors, comme $G(B)$ est un groupe, il contient $\langle B\rangle$ et comme c'est un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$, d'après *(a)*, il contient l'adérence de Zariski $\langle \bar{B}\rangle$ de $\langle B\rangle$ dans $GL_n(\mathbb{C})$. D'autre part, le groupe algébrique $\langle \bar{B}\rangle$ contient B donc il contient $G(B)$, le plus petit sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$ contenant B. □

Notation 4.1.2. *Pour toute matrice $B \in GL_n(\mathbb{C})$, on notera $G(B)$ le plus petit sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$ contenant B. C'est, d'après la proprieté précédente, l'adhérence de Zariski dans $GL_n(\mathbb{C})$ du sous-groupe monogène $\langle B\rangle$. On appellera $G(B)$ le sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$ engendré par B. On dira qu'un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$ est monogène s'il est de la forme $G(B)$, pour une matrice $B \in GL_n(\mathbb{C})$.*

Exemple 4.1.3.
- Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Si $a \notin \mu_\infty$ (a n'est pas une racine de l'unité), alors le sous-groupe algébrique de $\mathbb{C}^*$ engendré par a est $G(a) = \mathbb{C}^*$. Si $a \in \mu_\infty$ est une racine primitive d-ème de l'unité, avec $d \in \mathbb{N}^*$, alors le sous-groupe algébrique de $\mathbb{C}^*$ engendré par a est $G(a) = \mu_d$ le groupe des racines d-èmes de l'unité.
- Le sous-groupe algébrique de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par une matrice unipotente $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est réduit à $\{I_2\}$ si $a = 0$, et est le groupe additif tout entier sinon.

Propriété 4.1.4. *Soit H un sous-groupe commutatif de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors, l'adhérence de Zariski $\bar{H}$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe algébrique commutatif de $GL_n(\mathbb{C})$.*

[1] Tous les groupes algébriques qui interviennent dans cette thèse sont des groupes algébriques affines complexes.

Démonstration. D'après la propriété 4.1.1 *(a)*, l'adhérence de Zariski $\bar{H}$ est un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$.
On note $I(H)$ l'idéal radiciel de l'algèbre affine $\mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}]$ de $GL_n(\mathbb{C})$ qui définit l'adhérence de Zariski $\bar{H}$.
Soit $A \in H$. Le sous-groupe H est commutatif donc l'égalité matricielle $A(T_{i,j}) = (T_{i,j})A$ définit des équations de $\mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}]$ vérifiées par les éléments de H. Ce sont donc des équations de $I(H)$. Aussi, les éléments de H et de $\bar{H}$ commutent.
Soit $B \in H$. Les éléments de H et de $\bar{H}$ commutent donc l'égalité matricielle $B(T_{i,j}) = (T_{i,j})B$ définit des équations de $\mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}]$ vérifiées par les éléments de H. Ce sont donc des équations de $I(H)$. Aussi, le sous-groupe $\bar{H}$ est commutatif. □

Corollaire 4.1.5. *Soit $B \in GL_n(\mathbb{C})$. Le sous-groupe algébrique monogène $G(B)$ de $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe commutatif.*

4.1.2 Décomposition de Jordan

Toute matrice inversible $B \in GL_n(\mathbb{C})$ se décompose de façon unique dans $GL_n(\mathbb{C})$ sous la forme $B = B_sB_u$, avec $B_s \in GL_n(\mathbb{C})$ semi-simple, $B_u \in GL_n(\mathbb{C})$ unipotente et $B_sB_u = B_uB_s$. C'est la décomposition de Dunford multiplicative de l'élément $B \in GL_n(\mathbb{C})$ (*cf* [**?**] p. 644).

Notation 4.1.6. *Pour toute matrice $B \in GL_n(\mathbb{C})$, on notera respectivement B_s et B_u les composantes semi-simple et unipotente de la décompositionde Dunford multiplicative de la matrice B.*

Soit $B \in GL_n(\mathbb{C})$. On va montrer que le sous-groupe algébrique monogène $G(B)$ de $GL_n(\mathbb{C})$ se décompose en le produit $G(B_s)G(B_u)$ du groupe algébrique diagonalisable $G(B_s)$ et du groupe algébrique unipotent $G(B_u)$. Pour cela, on reprend les théorèmes de structure énoncés et prouvés dans [**?**].
Dans les deux parties suivantes, on rappellera les structures des groupes algébriques $G(B_s)$ et $G(B_u)$.

Théorème 4.1.7. *Soit G un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$. Soit $B \in G$. Alors, les composantes semi-simple B_s et unipotente B_u de la décomposition de Dunford multiplicative de B dans $GL_n(\mathbb{C})$ sont des éléments de G.*

Démonstration. *cf* [**?**] p. 99. □

Théorème 4.1.8. *Soit G un sous-groupe algébrique commutatif de $GL_n(\mathbb{C})$. Soient G_s l'ensemble des composantes semi-simples de la décomposition de Dunford multiplicative des éléments de G et G_u l'ensemble de leurs composantes unipotentes. Alors, les sous-groupes G_s et G_u sont des sous-groupes algébriques de G et l'application produit $G_s \times G_u \to G$ est un isomorphisme de groupes algébriques.*

Démonstration. *cf* [**?**] p. 100. □

Corollaire 4.1.9. *Pour toute matrice $B \in GL_n(\mathbb{C})$, on a le produit $G(B) = G(B_s)G(B_u)$.*

Démonstration. D'après le théorème de structure 4.1.8 précédent, on a l'isomorphisme produit $G(B)_s \times G(B)_u \to G(B)$. On a $B_s \in G(B)_s$. Toujours d'après le théorème de structure précédent, le groupe $G(B)_s$ est un groupe algébrique, donc $G(B_s) \subset G(B)_s$. De même, on a $B_u \in G(B)_u$ et donc $G(B_u) \subset G(B)_u$. L'image du sous-groupe algébrique $G(B_s) \times G(B_u)$ de $G(B)_s \times G(B)_u$ par l'isomorphisme produit est un sous-groupe algébrique de $G(B)$ contenant B. C'est donc $G(B)$ tout entier, et par image réciproque par l'isomorphisme produit, on a $G(B_s) \times G(B_u) = G(B)_s \times G(B)_u$, et donc $G(B_s) = G(B)_s$ et $G(B_u) = G(B)_u$. □

4.1.3 Structure d'un sous-groupe algébrique monogène unipotent de $GL_n(\mathbb{C})$

Soit une matrice $B_u \in GL_n(\mathbb{C})$ unipotente, c'est-à-dire telle que la matrice $B_u - I_n$ est nilpotente. Alors, la somme $\sum_{i\geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i}(B_u - I_n)^i$ est finie. Parce que $B_u - I_n$ est nilpotente, cette somme définit une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{C})$ notée $\log B_u$. La matrice $\log B_u$ est l'unique matrice nilpotente telle que $\exp(\log B_u) = B_u$ (on le vérifie formellement).
Aussi, pour tout élément $\lambda \in \mathbb{C}$, on définit $B_u^\lambda = \exp(\lambda \log B_u) \in GL_n(\mathbb{C})$.

Proposition 4.1.10. *Soit $B_u \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice unipotente. L'application $\mathbb{G}_a \to GL_n(\mathbb{C})$ définie par $\lambda \mapsto B_u^\lambda$ est un morphisme injectif de groupes algébriques dont l'image est $G(B_u)$.*
Aussi, si $B_u \neq I_n$, le groupe algébrique $G(B_u)$ est le groupe additif $\mathbb{G}_a$.

Démonstration. La matrice $\log B_u$ est nilpotente donc l'application $\lambda \mapsto \exp(\lambda \log B_u)$ est polynomiale en la variable λ. C'est bien un morphisme de groupes algébriques. La matrice $\exp(\lambda \log B_u)$ est unipotente et son logarithme est $\lambda \log B_u$ donc l'application est injective. L'image de l'application est donc un sous-groupe algébrique[2] de $GL_n(\mathbb{C})$ contenant B_u et n'admettant aucun sous-groupe algébrique strict (parce que le groupe additif $\mathbb{G}_a$ n'admet aucun sous-groupe algébrique strict non trivial). C'est donc $G(B_u)$, le plus petit sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$ contenant B_u. □

4.1.4 Structure d'un sous-groupe algébrique monogène diagonalisable de $GL_n(\mathbb{C})$

Définition 4.1.11. *Un sous-groupe algébrique G de $GL_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable s'il est conjugué à un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$ constitué de matrices diagonales.*

Exemple 4.1.12.
- Le sous-groupe $D_n(\mathbb{C})$ de $GL_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices diagonales est un sous-groupe algébrique (nécessairement diagonalisable) de $GL_n(\mathbb{C})$. C'est le lieu des zéros dans $GL_n(\mathbb{C})$ des polynômes $T_{i,j}$, pour $i \neq j$, de $\mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}]$. Son algèbre de Hopf s'identifie à $\mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_n, T_n^{-1}]$ avec $\mu^*(T_i) = T_i \otimes T_i$ ($= T_i S_i$ avec l'identification faite dans l'exemple 1.2.14), $\varepsilon^*(T_i) = 1$ et $\iota^*(T_i) = T_i^{-1}$.
- Soit $B_s \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice semi-simple. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $D = PB_sP^{-1}$ est une matrice diagonale. L'application $G(B_s) \to GL_n(\mathbb{C})$ définie par $A \mapsto PAP^{-1}$ est un morphisme injectif de groupes algébriques (application polynomiale en les coordonnées de A). L'image est un groupe algébrique contenant D, et donc contenant le groupe algébrique $G(D)$. L'image réciproque de $G(D)$ par cette application est un sous-groupe algébrique de $G(B_s)$ contenant B_s. C'est donc $G(B_s)$ tout entier. Cette application définit donc un isomorphisme entre les groupes algébriques $G(B_s)$ et $G(D)$.
La matrice D est diagonale donc le groupe $G(D)$ est un sous-groupe algébrique du groupe $D_n(\mathbb{C})$. Le groupe $G(B_s)$ est donc diagonalisable.

Définition 4.1.13. *Soit G un groupe algébrique affine complexe. On appelle caractère de G un morphisme de groupes algébriques $\mathcal{X} : G \to \mathbb{G}_m$.*

Exemple 4.1.14.
- Soit G un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$. L'application $\det : G \to \mathbb{C}^*$ est un caractère de G.
- Les coordonnées T_i de l'algèbre affine $\mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_n, T_n^{-1}]$ de $D_n(\mathbb{C})$ définissent des caractères $T_i : D_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ sur $D_n(\mathbb{C})$ qui associent à toute matrice diagonale son i-ème coefficient diagonal. Ces caractères canoniques sur $D_n(\mathbb{C})$ ne vérifient aucune relation multiplicative et engendrent le groupe des caractères sur $D_n(\mathbb{C})$ (*cf* [**?**] p. 102.), qui est donc isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.

Proposition 4.1.15. *Tout sous-groupe algébrique de $D_n(\mathbb{C})$ est l'intersection de noyaux de caractères de $D_n(\mathbb{C})$.*

[2] Ce résultat n'est pas tautologique. Il est vrai en caractéristique nulle.

Démonstration. *cf* [?] p. 103. □

Corollaire 4.1.16. *Soit $D = diag(d_1, \dots, d_n) \in D_n(\mathbb{C})$. L'idéal radiciel $I(D)$ de définition du groupe $G(D)$ est l'idéal radiciel de $\mathbb{C}[T_1, T_1^{-1}, \dots, T_n, T_n^{-1}]$ engendré par les polynômes $T_1^{\alpha_1} \dots T_n^{\alpha_n} - 1$, pour les n-uplets $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que $d_1^{\alpha_1} \cdots d_n^{\alpha_n} = 1$.*

Proposition 4.1.17 (Chevalley)**.** *Soit $D = diag(d_1, \dots, d_n) \in D_n(\mathbb{C})$. Alors,*

$$G(D) = \{\gamma(D)\,;\, \gamma \in Hom_{gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)\}$$

où l'on note $\gamma(D) = diag(\gamma(d_1), \dots, \gamma(d_n))$, pour $\gamma \in Hom_{gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ un morphisme du groupe $\mathbb{C}^*$ (que l'on ne considère pas ici comme un groupe algébrique) dans lui-même.
Les matrices $\gamma(D)$, pour $\gamma \in Hom_{gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$, sont appelées les répliques de la matrice D.

Démonstration. Soit $\gamma \in Hom_{gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ et soit un n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $d_1^{\alpha_1} \cdots d_n^{\alpha_n} = 1$. Alors $\gamma(d_1)^{\alpha_1} \cdots \gamma(d_n)^{\alpha_n} = \gamma(d_1^{\alpha_1} \cdots d_n^{\alpha_n}) = \gamma(1) = 1$.
Réciproquement, si $D' = diag(d'_1, \dots, d'_n) \in G(D)$, c'est-à-dire telle $(d'_1)^{\alpha_1} \cdots (d'_n)^{\alpha_n} = 1$ pour les n-uplets $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que $d_1^{\alpha_1} \cdots d_n^{\alpha_n} = 1$, on peut construire un morphisme de groupes $\gamma \in Hom_{gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ tel que $\gamma(d_1) = d'_1, \dots, \gamma(d_n) = d'_n$. □

Corollaire 4.1.18. *Soit $B_s \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice semi-simple. Alors,*

$$G(B_s) = \{\gamma(B_s)\,;\, \gamma \in Hom_{gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)\}$$

où, pour $\gamma \in Hom_{gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$, on note $\gamma(B_s) = P^{-1}\gamma(D)P$, avec $B_s = P^{-1}DP$ une diagonalisation quelconque de B_s (on peut vérifier que la matrice $\gamma(B_s)$ ne dépend pas de la diagonalisation de B_s choisie pour la définir).
Les matrices $\gamma(B_s)$, pour $\gamma \in Hom_{gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$, sont appelées les répliques de la matrice B_s.

4.2 Calcul du D-groupoïde de Galois

Dans cette partie, on va calculer le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants et son D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales. La méthode de calcul est analogue à celle utilisée dans la preuve de la proposition 2.3.2 pour calculer le D-groupoïde de Galois de l'équation des constantes.
La première étape du calcul consiste à utiliser la forme particulière des éléments de la dynamique pour exhiber un majorant pour le D-groupoïde de Galois du système. Ce majorant dépend du groupe algébrique engendré par les matrices jacobiennes des éléments de la dynamique.
Ensuite, pour montrer que ce majorant est optimal, on réduit une équation du D-groupoïde modulo le majorant. La conclusion se ramène à montrer que l'équation restante appartient à un idéal de polynômes. Pour cela, on va utiliser une base de Groebner de l'idéal et un algorithme de division adapté qui donne de bonnes propriétés sur les restes.

4.2.1 Préliminaires : algorithme de division et bases de Groebner

Les définitions et théorèmes rappelés ici sont repris de [?], 2.

On considère un anneau de polynômes $k[t_1, \dots, t_n]$ sur un corps commutatif k. Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n}$.
On munit $\mathbb{N}^n$ par exemple de l'ordre lexicographique noté $>$ et défini, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, par : $\alpha > \beta$ si la première composante non nulle à gauche de $\alpha - \beta$ dans $\mathbb{Z}^n$ est positive.
Cet ordre définit un bon ordre monomial (*cf* [?], p. 55-57) sur l'ensemble des monômes de $k[t_1, \dots, t_n]$.

On a $t^\alpha > t^\beta$, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, si $\alpha > \beta$. Par exemple, on a $t_1 > t_2 > \ldots > t_n$.
Aussi, tout polynôme est une combinaison linéaire à coefficients dans k de monômes que l'on peut ordonner. On peut donc parler, pour un polynôme de $k[t_1, \ldots, t_n]$, de terme dominant, de coefficient dominant et de monôme dominant.

Théorème 4.2.1 (algorithme de division)**.** *Soit $(f_1, \ldots, f_s)$ un s-uplet de polynômes de $k[t_1, \ldots, t_n]$ et soit $f \in k[t_1, \ldots, t_n]$. Alors, il existe des polynômes $a_1, \ldots, a_s \in k[t_1, \ldots, t_n]$ et un reste $r \in k[t_1, \ldots, t_n]$ tels que*

$$f = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s + r$$

avec $r = 0$, ou bien r est une combinaison linéaire à coefficients dans k de monômes dont aucun n'est divisible par un monôme dominant de l'un des polynômes f_i.

Démonstration. L'algorithme donnant ce résultat est décrit en détail dans [**?**], p. 64.
Cet algorithme étend l'algorithme d'Euclide. Le bon ordre monomial induit par l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^n$ étend l'ordre sur les monômes de $k[t]$ induit par l'ordre (lexicographique) naturel sur $\mathbb{N}$.
A chaque étape de l'algorithme, si le terme dominant du dividende est divisible par le terme dominant de l'un des f_i, on soustrait du dividende, de façon à faire diminuer son degré, un multiple approprié de l'un des f_i, et l'on compense cette opération en modifiant le coefficient a_i. Sinon, le terme dominant du dividende est soustrait du dividende et est ajouté au reste. □

Remarque 4.2.2. La description de cet algorithme de division montre qu'il est adapté au cas où k est un anneau intègre et les f_i sont des polynômes unitaires de $k[t_1, \ldots, t_n]$, c'est-à-dire des polynômes dont les coefficients dominants sont inversibles dans l'anneau k.

Définition 4.2.3. *Soit I un idéal de $k[t_1, \ldots, t_n]$. Un sous-ensemble fini $\mathfrak{g} = \{g_1, \ldots, g_s\} \subset I$ est appelé une base de Groebner de I si le monôme dominant de chaque élément de I est divisible par le monôme dominant de l'un des g_i.*

Propriété 4.2.4. *Soit I un idéal de $k[t_1, \ldots, t_n]$ et soit $\mathfrak{g} = \{g_1, \ldots, g_s\} \subset I$ une base de Groebner de I. Alors :*
(a) l'ensemble $\mathfrak{g}$ est un système générateur de l'idéal I,
(b) Un polynôme $f \in k[t_1, \ldots, t_n]$ est un élément de I si et seulement si le reste de la division de f par la base de Groebner $(g_1, \ldots, g_s)$ est nul.

Démonstration. Soit $f \in I$. L'algorithme de division fournit des polynômes $a_1, \ldots, a_s \in k[t_1, \ldots, t_n]$ et un reste $r \in k[t_1, \ldots, t_n]$ tels que $f = a_1 g_1 + \cdots + a_s g_s + r$ et $r = 0$ ou bien r est une combinaison linéaire à coefficients dans k de monômes dont aucun n'est divisible par un monôme dominant de l'un des polynômes g_i. Or, $r = f - (a_1 g_1 + \cdots + a_s g_s) \in I$ donc si $r \neq 0$, comme $\mathfrak{g}$ est une base de Groebner de I, le monôme dominant de r est divisible par le monôme dominant de l'un des g_i. Nécessairement, $r = 0$. Ceci démontre la propriété *(a)* et la condition nécessaire de la propriété *(b)*. Réciproquement, si le reste de la division d'un polynôme $f \in k[t_1, \ldots, t_n]$ par la base de Groebner $\mathfrak{g} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ est nul, alors f est une combinaison des éléments g_i de $\mathfrak{g} \subset I$ donc $f \in I$. □

Théorème 4.2.5. *Tout idéal non nul de $k[t_1, \ldots, t_n]$ admet une base de Groebner.*

Démonstration. *cf* [**?**], p. 77.
Ce résultat est une conséquence du lemme de Dickson (*cf* [**?**], p. 71) qui assure que tout idéal monomial (engendré par des monômes) admet un nombre fini de générateurs monomiaux. □

4.2.2 Calcul du D-groupoïde de Galois

Pour cette partie et la suivante, on considère $X(qz) = AX(z)$, un système aux q-différences linéaire de rang n à coefficients constants, défini par une matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

On rappelle que les éléments de la dynamique de ce système sont les germes de difféomorphismes locaux de $Aut(P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)$ de la forme

$$(z, X) \mapsto (q^k z, A^k X)$$

La première composante de ces éléments est indépendante de la variable X et dépend linéairement de la variable z. La seconde composante de ces éléments est indépendante de la variable z et dépend linéairement de la variable X.
On va montrer de façon précise que le calcul du D-groupoïde de Galois se ramène essentiellement à calculer les équations du sous-groupe algébrique de $GL_{n+1}(\mathbb{C})$ engendré par les matrices jacobiennes des éléments de la dynamique, à savoir les matrices

$$\begin{pmatrix} q^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

On introduit donc la matrice

$$J = diag(q, A) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$$

et le sous-groupe algébrique monogène

$$G(J) \subset GL_{n+1}(\mathbb{C})$$

qu'elle engendre.
On note $I(J)$ l'idéal radiciel de l'algèbre de Hopf $\mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}]$ de $GL_{n+1}(\mathbb{C})$ qui le définit. Ici, on a $1 \leq i, j \leq n+1$.

On considère le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\begin{array}{cccc} \tau : & \mathbb{C}[T_{i,j}, \Delta^{-1}] & \to & \Gamma((P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)^2, \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}) \\ & \begin{pmatrix} T_{0,0} & T_{0,1} & \cdots & T_{0,n} \\ T_{1,0} & & & \\ \vdots & & (T_{i,j})_{i,j} & \\ T_{n,0} & & & \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X_n} \\ \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial z} & & & \\ \vdots & & (\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial X_j})_{i,j} & \\ \frac{\partial \bar{X}_n}{\partial z} & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 4.2.6. Le morphisme τ est construit de sorte que les images par τ des polynômes de l'idéal $I(J)$ donnent des équations (globales) vérifiées par la dynamique.

Théorème 4.2.7. *Le D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A)$ du système aux q-différences $X(qz) = AX(z)$ est le D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ engendré, au sens du théorème* 1.2.38*, par le groupoïde d'ordre* 2 *:*

$$\mathcal{G}(A)_2 = \left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} z - \bar{z}, \partial^2 \bar{z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} X - \bar{X}, \partial^2 \bar{X}, \tau(I(J)) \right\rangle \subset \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}, P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$$

Les solutions $sol(\mathcal{G}al(A))$ de ce D-groupoïde sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \beta X)$, avec $diag(\alpha, \beta) \in G(J)$.

Démonstration. On procède en deux étapes. On montre d'abord que l'idéal $\mathcal{G}(A)_2$ du faisceau $\mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n,P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}$ est un groupoïde d'ordre 2, et qu'il engendre un majorant $\sqrt{\mathcal{G}(A)'}$ du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A)$. On montre ensuite l'égalité $\mathcal{G}al(A) = \sqrt{\mathcal{G}(A)'}$.

On vérifie facilement que l'idéal $\mathcal{G}(A)_2$ est un groupoïde d'ordre 2 sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. Etant donné la proposition 3.4.1, il reste à vérifier les conditions *(i)*, *(ii)* et *(iii)* de la définition 1.2.23 sur les générateurs $\tau(I(J))$ de $\mathcal{G}(A)_2$. Cela vient du fait que l'idéal $I(J)$ définit un groupe algébrique. Il vérifie donc les conditions *(i)*, *(ii)* et *(iii)* de la définition 1.2.15 et l'on a les relations $c^* \circ \tau = \tau \circ \mu^*$, $e^* \circ \tau = \tau \circ \varepsilon^*$ et $i^* \circ \tau = \tau \circ \iota^*$.
Les solutions convergentes de $\mathcal{G}(A)_2$ sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \beta X)$, avec $diag(\alpha, \beta) \in G(J)$. Elles contiennent bien les éléments de la dynamique $Dyn(A)$. Aussi, le D-groupoïde sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ engendré par $\mathcal{G}(A)_2$, noté $\sqrt{\mathcal{G}(A)'}$, est un majorant, dans le sens de la définition 1.2.43, du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A)$. On a l'inclusion $\sqrt{\mathcal{G}(A)'} \subset \mathcal{G}al(A)$.

Montrons ensuite qu'il y a égalité entre les D-groupoïdes $\sqrt{\mathcal{G}(A)'}$ et $\mathcal{G}al(A)$. Soit $(a, b) \in P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. Soit E une équation de la fibre $\mathcal{G}al(A)_{(a,b)}$. Par des divisions euclidiennes successives de E (puis de ses restes) par les générateurs unitaires $\frac{\partial\bar{z}}{\partial X}, \partial^2\bar{z}, \frac{\partial\bar{X}}{\partial z}, \frac{\partial\bar{X}}{\partial X}X - \bar{X}, \partial^2\bar{X}$ de $(\mathcal{G}(A)_2)_{(a,b)}$, puis par des divisions de Weierstrass successives (données par le lemme 1.2.29) du reste par les équations $\bar{z} - \frac{\partial\bar{z}}{\partial z}z$ et $\bar{X} - \frac{\partial\bar{X}}{\partial X}X$, on obtient une équation $E_1(z, X, \frac{\partial\bar{z}}{\partial z}, \frac{\partial\bar{X}}{\partial X}) \in \mathcal{G}al(A)_{(a,b)}$ telle que $E_1 \equiv E \mod \sqrt{\mathcal{G}(A)'}$.
On considére alors E_1 comme un élément de l'anneau $\mathbb{C}\{z - z_a, X - X_a\}\left[\frac{\partial\bar{z}}{\partial z}, \frac{\partial\bar{X}}{\partial X}\right]$. Les éléments de $Dyn(A) = \{(z, X) \mapsto (q^k z, A^k X)\}$ sont solutions de $\mathcal{G}al(A)$ et donc de E_1. Aussi, pour tout point (z_0, X_0) de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ proche de a, on a $E_1(z_0, X_0, q^k, A^k) = 0$ et donc $E_1(z_0, X_0, T_{0,0}, (T_{i,j})) \in I(J)$. Le lemme 4.2.8 ci-dessous assure que $E_1(z, X, T_{0,0}, (T_{i,j})) \in \langle I(J)\rangle$ dans $\mathbb{C}\{z - z_a, X - X_a\}[T_{0,0}, (T_{i,j})]$. On a donc $E_1(z, X, \frac{\partial\bar{z}}{\partial z}, \frac{\partial\bar{X}}{\partial X}) \in \langle\tau(I(J))\rangle \subset \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C},P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$ et donc $E_1(z, X, \frac{\partial\bar{z}}{\partial z}, \frac{\partial\bar{X}}{\partial X}) \in \mathcal{G}(A)_2$. $\square$

Lemme 4.2.8. *On considère l'anneau $\mathbb{C}[t_0, \ldots, t_N]$ des polynômes en les indéterminées $t_0, \ldots, t_N$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$, et l'anneau $\mathbb{C}\{y_0, \ldots, y_n\}[t_0, \ldots, t_N]$ des polynômes en les indéterminées $t_0, \ldots, t_N$ et à coefficients dans l'anneau $\mathbb{C}\{y_0, \ldots, y_n\}$ des séries convergentes en 0 en les indéterminées $y_0, \ldots, y_n$. On note pour simplifier $\underline{y} = (y_0, \ldots, y_n)$ et $\underline{t} = (t_0, \ldots, t_N)$.*
Soit I un idéal de $\mathbb{C}[\underline{t}]$ et soit $E(\underline{y}, \underline{t})$ un polynôme de $\mathbb{C}\{\underline{y}\}[\underline{t}]$ tel que, pour tout point $\underline{y}^0$ proche de 0, l'évaluation $E(\underline{y}^0, \underline{t})$ est un él'ement de l'idéal I de $\mathbb{C}[\underline{t}]$.
Alors, le polynôme $E(\underline{y}, \underline{t})$ est un élément de l'idéal $\langle I\rangle$ de $\mathbb{C}\{\underline{y}\}[\underline{t}]$ engendré par I.

Démonstration. Soit $(g_1(\underline{t}), \ldots, g_s(\underline{t}))$ une base de Groebner de l'idéal I de $\mathbb{C}[\underline{t}]$. L'anneau $\mathbb{C}\{\underline{y}\}$ est un anneau intègre et les polynômes $g_1(\underline{t}), \ldots, g_s(\underline{t})$ sont des polynômes unitaires de l'anneau $\mathbb{C}\{\underline{y}\}[\underline{t}]$. On effectue donc la division donnée par le théorème 4.2.1 et adaptée par la remarque 4.2.2 de $E(\underline{y}, \underline{t})$ par la base de Groebner $(g_1(\underline{t}), \ldots, g_s(\underline{t}))$. On obtient des polynômes $a_1(\underline{y}, \underline{t}), \ldots, a_s(\underline{y}, \underline{t}), R(\underline{y}, \underline{t}) \in \mathbb{C}\{\underline{y}\}[\underline{t}]$ tels que

$$E(\underline{y}, \underline{t}) = a_1(\underline{y}, \underline{t})g_1(\underline{t}) + \cdots + a_s(\underline{y}, \underline{t})g_s(\underline{t}) + R(\underline{y}, \underline{t})$$

avec $R = 0$ ou bien aucun monôme de $R(\underline{y}, \underline{t})$ (considéré comme un polynôme en l'indéterminée $\underline{t}$) n'est divisible par aucun des monômes dominants des $g_i(\underline{t})$.
Pour tout point $\underline{y}^0$ proche de 0, l'évaluation des coefficients des polynômes de cette dernière expression en $\underline{y}^0$ donne

$$E(\underline{y}^0, \underline{t}) = a_1(\underline{y}^0, \underline{t})g_1(\underline{t}) + \cdots + a_s(\underline{y}^0, \underline{t})g_s(\underline{t}) + R(\underline{y}^0, \underline{t})$$

Par hypothèse, le polynôme $E(\underline{y}^0, \underline{t})$ est un élément de I et les éléments $g_1(\underline{t}), \ldots, g_s(\underline{t})$ de la base de Groebner sont dans I. Aussi, $R(\underline{y}^0, \underline{t}) \in I$.
On suppose que $R(\underline{y}^0, \underline{t}) \neq 0$. Alors, d'une part, comme les monômes de $R(\underline{y}^0, \underline{t})$ correspondent aux

monômes de $R(\underline{y},\underline{t})$ dont l'évaluation du coefficient en $\underline{y}^0$ est non nulle, et comme aucun monôme de $R(\underline{y},\underline{t})$ (considéré comme un polynôme en l'indéterminée $\underline{t}$) n'est divisible par aucun des monômes dominants des $g_i(\underline{t})$, on a qu'aucun monôme de $R(\underline{y}^0,\underline{t})$ n'est divisible par aucun des monômes dominants des $g_i(\underline{t})$.
D'autre part, le polynôme $R(\underline{y}^0,\underline{t})$ est un élément de l'idéal I et $(g_1(\underline{t}),\dots,g_s(\underline{t}))$ forme une base de Groebner de l'idéal I donc, d'après la définition4.2.3, le monôme dominant de $R(\underline{y}^0,\underline{t})$ est divisible par le monôme dominant de l'un des g_i.
On obtient ainsi une contradiction et le polynôme $R(\underline{y}^0,\underline{t})$ est donc nécessairement nul.
Pour tout point $\underline{y}^0$ proche de 0, le polynôme $R(\underline{y}^0,\underline{t})$ est nul donc le polynôme $R(\underline{y},\underline{t})$ est nul dans $\mathbb{C}\{y_0,\dots,y_n\}[t_0,\dots,t_N]$. On a donc

$$E(\underline{y},\underline{t}) = a_1(\underline{y},\underline{t})g_1(\underline{t}) + \cdots + a_s(\underline{y},\underline{t})g_s(\underline{t})$$

et donc E est un élément de l'idéal $\langle I\rangle$ de $\mathbb{C}\{y_0,\dots,y_n\}[t_0,\dots,t_N]$ engendré par I. □

4.2.3 Calcul du D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales

Théorème 4.2.9. *Pour le système aux q-différences linéaire à coefficients constants $X(qz) = AX(z)$, le D-sous-groupoïde de Galois des solutions qui fixent les transversales est le D-groupoïde $\widetilde{\mathcal{G}al}(A)$ engendré sur $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ par le groupoïde d'ordre 2 :*

$$\widetilde{\mathcal{G}}(A)_2 = \left\langle \bar{z}-z, \frac{\partial\bar{z}}{\partial X}, \frac{\partial\bar{z}}{\partial z}-1, \partial^2\bar{z}, \frac{\partial\bar{X}}{\partial z}, \frac{\partial\bar{X}}{\partial X}X-\bar{X}, \partial^2\bar{X}, \tau(I(J))\right\rangle \subset \mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C},P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$$

Ses solutions $sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(A))$ sont les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ de la forme $(z,X)\mapsto(z,\beta X)$, avec $\beta\in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $diag(1,\beta)\in G(J)$.
Pour tout point $z_0\in P^1\mathbb{C}$, le groupe des solutions associé à la transversale $\{z_0\}\times\mathbb{C}^n$ est le groupe

$$Sol_{z_0}(\widetilde{\mathcal{G}al}(A)) = \{\beta\in GL_n(\mathbb{C})\,;\, diag(1,\beta)\in G(J)\}\subset GL_n(\mathbb{C})$$

Il est indépendant de la transversale $\{z_0\}\times\mathbb{C}^n$ choisie.

Démonstration. On vérifie facilement que l'idéal de $\mathcal{O}_{J_2^*(P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C},P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C})}$ proposé est un groupoïde d'ordre 2 et on vérifie comme dans la preuve de la proposition 3.3.6 que le D-groupoïde qu'il engendre est le D-sous-groupoïde $\widetilde{\mathcal{G}al}(A)$ des solutions de $\mathcal{G}al(A)$ qui fixent les transversales.
Ses solutions $sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(A))$ sont les solutions de $\mathcal{G}al(A)$ qui fixent les transversales, c'est-à-dire, étant donné le résultat de la proposition 4.2.7, les germes des difféomorphismes de $P^1\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ de la forme $(z,X)\mapsto(z,\beta X)$, avec $diag(1,\beta)\in G(J)$.
Le groupe des solutions au-dessus d'un point $z_0\in P^1\mathbb{C}$ est le groupe $\{\beta\in GL_n(\mathbb{C})\,;\, diag(1,\beta)\in G(J)\}$. Cette description est indépendante du point z_0 choisi. □

Notation 4.2.10. *On note G_A « le groupe transverse » défini par le théorème 4.2.9. On a :*

$$G_A = \{\beta\in GL_n(\mathbb{C})\,;\, diag(1,\beta)\in G(J)\}\subset GL_n(\mathbb{C})$$

Proposition 4.2.11. *Le groupe G_A est un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$.*

Démonstration. On note $\mathbb{C}^*\times GL_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe algébrique de $GL_{n+1}(\mathbb{C})$ défini par les polynômes $T_{0,j}$ et $T_{i,0}$, pour $1\le i,j\le n$. Les matrices J^k, pour $k\in\mathbb{Z}$, sont des éléments de ce sous-groupe donc, d'après la proprieté 4.1.1, *(a)*, le sous-groupe algébrique monogène $G(J)$ de $GL_{n+1}(\mathbb{C})$ est contenu dans le sous-groupe algébrique $\mathbb{C}^*\times GL_n(\mathbb{C})$ de $GL_{n+1}(\mathbb{C})$.
D'autre part, le groupe algébrique $GL_n(\mathbb{C})$ s'identifie au sous-groupe $\{1\}\times GL_n(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}^*\times GL_n(\mathbb{C})$ et le groupe G_A s'identifie au sous-groupe intersection $G(J)\cap\{1\}\times GL_n(\mathbb{C})$. D'après la proprieté 4.1.1, *(b)*, l'intersection $G(J)\cap\{1\}\times GL_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe algébrique de $\{1\}\times GL_n(\mathbb{C})$ et le groupe G_A est donc un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$. □

Le groupe G_A est un candidat naturel à redonner le groupe de Galois du système aux q-différences $X(qz) = AX(z)$.

4.3 Groupe de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants

Sauloy propose dans [**?**] une approche analytique de la théorie de Galois des systèmes aux q-différences fuchsiens, dans laquelle la définition du groupe de Galois est obtenue par dualité tannakienne.

Dans cette partie, on extrait de [**?**] la définition et la description du groupe de Galois de la catégorie des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants, puis on obtient par spécialisation, la définition et la description du groupe de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants particulier.

4.3.1 La catégorie des représentations $\mathbb{C}$-linéaires de dimension finie de $\mathbb{Z}$

La description de [**?**] du groupe de Galois de la catégorie des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants est obtenue en comparant cette catégorie à la catégorie des représentations $\mathbb{C}$-linéaires de dimension finie du groupe $\mathbb{Z}$.

On rappelle donc, dans cette partie, une brève description de la catégorie tannakienne des représentations $\mathbb{C}$-linéaires de dimension finie du groupe $\mathbb{Z}$. On ne donnera pas toutes les justifications. Une description détaillée est faite dans [**?**], Annexe A.
Cela permettra, dans un premier temps, d'illustrer la théorie des catégories tannakiennes.
Cela permettra surtout, dans la partie 4.3.2 suivante, de rappeller la description de [**?**] de la catégorie tannakienne des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants, et de son groupe de Galois.

La théorie des catégories tannakiennes est un principe de dualité entre les groupes algébriques affines et leurs représentations rationnelles. Essentiellement, cette théorie donne une caractérisation des catégories qui sont équivalentes à la catégorie des représentations d'un groupe pro-algébrique[3] affine, et donne une réalisation de ce groupe comme le groupe des automorphismes tensoriels d'un foncteur fibre.

La catégorie tannakienne des représentations $\mathbb{C}$-linéaires de dimension finie de $\mathbb{Z}$

Définition 4.3.1. *On note $\mathcal{R}$ la catégorie dont les objets sont les couples $(\mathbb{C}^n, A)$ constitués d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$, et dont les morphismes d'un objet $(\mathbb{C}^n, A)$ vers un objet $(\mathbb{C}^p, B)$ sont les matrices $F \in M_{p,n}(\mathbb{C})$ telles que $BF = FA$.*
On note $Hom_{\mathcal{R}}((\mathbb{C}^n, A), (\mathbb{C}^p, B))$ l'ensemble des morphismes de $\mathcal{R}$ de l'objet $(\mathbb{C}^n, A)$ vers l'objet $(\mathbb{C}^p, B)$.

Remarque 4.3.2. La catégorie $\mathcal{R}$ est équivalente à la catégorie des représentations $\mathbb{C}$-linéaires de dimension finie du groupe $\mathbb{Z}$. En effet, une représentation $\mathbb{C}$-linéaire de dimension finie du groupe $\mathbb{Z}$ est la donnée d'un morphisme de groupes $\mathbb{Z} \to GL(V)$, avec V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Un tel morphisme est complètement déterminé par l'image $f \in GL(V)$ du générateur 1 de $\mathbb{Z}$. Le choix d'une $\mathbb{C}$-base de V permet d'associer au couple (V, f), qui détermine la représentation de $\mathbb{Z}$ considérée, un objet de $\mathcal{R}$. Une description similaire a lieu pour les morphismes.

[3] Un groupe pro-algébrique affine est la limite projective d'un système projectif de groupes algébriques affines. En particulier, un groupe algébrique affine est un groupe pro-algébrique affine.

On ne considère ici que la catégorie $\mathcal{R}$, et non pas la catégorie de toutes les représentations $\mathbb{C}$-linéaires de dimension finie du groupe $\mathbb{Z}$. En effet, c'est la catégorie $\mathcal{R}$ que l'on comparera ensuite à la catégorie des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants.

La définition de catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$ caractérise les catégories équivalentes à la catégorie des représentations rationnelles d'un groupe pro-algébrique affine complexe.
Une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$ est une catégorie tensorielle, $\mathbb{C}$-linéaire, abélienne et rigide, munie d'un foncteur vers la catégorie des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie qui est compatible au produit tensoriel, $\mathbb{C}$-linéaire, fidèle et exact. Un tel foncteur est appelé un foncteur fibre.
Une explication exhaustive de cette définition est exposée dans [**?**], p. 104-138. Un résumé de cet exposé est donné en appendice dans [**?**].

On ne donne pas ici une description exhaustive de la catégorie $\mathcal{R}$ en tant que catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$. On va seulement définir le produit tensoriel et le foncteur fibre naturel qui, essentiellement, font de la catégorie $\mathcal{R}$ une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$.

La définition 4.3.3 ci-dessous du produit tensoriel pour la catégorie $\mathcal{R}$ se déduit de la définition usuelle du produit tensoriel de deux représentations $\mathbb{C}$-linéaires de dimension finie d'un groupe. Cependant, cela demande de faire le choix, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, d'une identification des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^p$ et $\mathbb{C}^{np}$. On fixe donc, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, une bijection $\phi_{n,p} : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, np\}$.

Définition 4.3.3.
- Pour deux objets $(\mathbb{C}^n, A)$ et $(\mathbb{C}^p, B)$ de $\mathcal{R}$, le produit tensoriel de ces deux objets est l'objet de $\mathcal{R}$:

$$(\mathbb{C}^n, A) \otimes (\mathbb{C}^p, B) = (\mathbb{C}^{np}, A \otimes B)$$

où $A \otimes B$ représente la matrice de $GL_{np}(\mathbb{C})$ dont le coefficient de la $\phi(i,j)$-ème ligne et de la $\phi(k,l)$-ème colonne est $A_{i,k}B_{j,l}$.
- Pour deux morphismes $F \in Hom_{\mathcal{R}}((\mathbb{C}^n, A), (\mathbb{C}^p, B))$ et $G \in Hom_{\mathcal{R}}((\mathbb{C}^{n'}, A'), (\mathbb{C}^{p'}, B'))$, le produit tensoriel de ces deux morphismes est le morphisme de $\mathcal{R}$:

$$F \otimes G \in Hom_{\mathcal{R}}((\mathbb{C}^{nn'}, A \otimes A'), (\mathbb{C}^{pp'}, B \otimes B'))$$

où $F \otimes G$ représente la matrice de $M_{pp',nn'}(\mathbb{C})$ dont le coefficient de la $\phi(i,j)$-ème ligne et de la $\phi(k,l)$-ème colonne est $F_{i,k}G_{j,l}$.

Définition 4.3.4. *On note $\mathcal{V}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbb{C}^n$ de dimension un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et dont les morphismes d'un objet $\mathbb{C}^n$ vers un objet $\mathbb{C}^p$ sont les matrices $F \in M_{p,n}(\mathbb{C})$.*
Pour deux objets $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^p$ de $\mathcal{V}$, le produit tensoriel de ces deux objets est l'objet $\mathbb{C}^{np}$ de $\mathcal{V}$. Pour deux morphismes $F \in Hom_{\mathcal{V}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$ et $G \in Hom_{\mathcal{V}}(\mathbb{C}^{n'}, \mathbb{C}^{p'})$, le produit tensoriel de ces deux morphismes est le morphisme de $F \otimes G \in Hom_{\mathcal{V}}(\mathbb{C}^{nn'}, \mathbb{C}^{pp'})$, où $F \otimes G$ représente la matrice de $M_{pp',nn'}(\mathbb{C})$ dont le coefficient de la $\phi(i,j)$-ème ligne et de la $\phi(k,l)$-ème colonne est $F_{i,k}G_{j,l}$..

La catégorie $\mathcal{V}$ est équivalente à la catégorie des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 4.3.5. *On note ω le foncteur oubli de la catégorie $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{V}$. Il est défini, pour un objet $(\mathbb{C}^n, A)$ de $\mathcal{R}$, par $\omega(\mathbb{C}^n, A) = \mathbb{C}^n$, et pour un morphisme $F \in Hom_{\mathcal{R}}((\mathbb{C}^n, A), (\mathbb{C}^p, B))$, par $\omega(F) = F \in Hom_{\mathcal{V}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$.*

Pour deux objets $(\mathbb{C}^n, A)$ et $(\mathbb{C}^p, B)$ de $\mathcal{R}$, on a $\omega((\mathbb{C}^n, A) \otimes (\mathbb{C}^p, B)) = \omega(\mathbb{C}^n, A) \otimes \omega(\mathbb{C}^p, B)$. Pour deux morphismes F et G de $\mathcal{R}$, on a $\omega(F \otimes G) = \omega(F) \otimes \omega(G)$. Le foncteur ω est dit tensoriel.

Proposition 4.3.6. *La catégorie $\mathcal{R}$, munie du produit tensoriel de la définition* 4.3.3 *et du foncteur ω de la définition* 4.3.5*, a une structure de catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$.*

On dit que le foncteur ω est un foncteur fibre pour la catégorie tannakienne $\mathcal{R}$.

L'enveloppe pro-algébrique de $\mathbb{Z}$

La théorie des catégories tannakiennes assure qu'une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$ est équivalente à la catégorie des représentations rationnelles d'un groupe pro-algébrique affine, et donne une réalisation de ce groupe comme le groupe des automorphismes tensoriels du foncteur fibre.
On va expliciter ce résultat pour la catégorie $\mathcal{R}$.

On commence par rappeler la définition d'un automorphisme tensoriel du foncteur fibre ω, et donner une famille d'exemples naturels.

Définition 4.3.7.
- Un endomorphisme Φ du foncteur ω est la donnée, pour tout objet $(\mathbb{C}^n, A)$ de $\mathcal{R}$, d'un endomorphisme $\Phi(A) \in Hom_{\mathcal{V}}(\omega(\mathbb{C}^n, A), \omega(\mathbb{C}^n, A))$, de sorte que l'on ait, pour tout morphisme $F \in Hom_{\mathcal{R}}((\mathbb{C}^n, A), (\mathbb{C}^p, B))$, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n = \omega(\mathbb{C}^n, A) & \xrightarrow{\Phi(A)} & \omega(\mathbb{C}^n, A) = \mathbb{C}^n \\ {\scriptstyle F=\omega(F)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \omega(F)=F} \\ \mathbb{C}^p = \omega(\mathbb{C}^p, B) & \xrightarrow{\Phi(B)} & \omega(\mathbb{C}^p, B) = \mathbb{C}^p \end{array}$$

- Un automorphisme du foncteur ω est un endomorphisme Φ de ω tel que $\Phi(A)$ est inversible, pour tout objet $(\mathbb{C}^n, A)$ de $\mathcal{R}$.
- Un automorphisme Φ du foncteur ω est dit tensoriel, ou $\otimes$-compatible, si pour tout couple d'objets $((\mathbb{C}^n, A), (\mathbb{C}^p, B))$ de $\mathcal{R}$, on a $\Phi(A \otimes B) = \Phi(A) \otimes \Phi(B)$.
On note $Aut^{\otimes}(\omega)$ le groupe des automorphismes tensoriels du foncteur ω.

Exemple 4.3.8. *On a le morphisme injectif de groupes :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \hookrightarrow & Aut^{\otimes}(\omega) \\ k & \mapsto & \Phi_k \end{array}$$

où Φ_k est donné, pour tout objet $(\mathbb{C}^n, A)$ de $\mathcal{R}$, par $\Phi_k(\mathbb{C}^n, A) = A^k$.

La théorie des catégories tannakiennes assure que le groupe $Aut^{\otimes}(\omega)$ est naturellement muni d'une structure de groupe pro-algébrique affine complexe et que la catégorie $\mathcal{R}$ est équivalente à la catégorie des représentations rationnelles de ce groupe.
De plus, dans le cas précis de la catégorie $\mathcal{R}$, ce groupe peut être explicité.

Théorème 4.3.9.
(a) Le groupe $Aut^{\otimes}(\omega)$ est naturellement muni d'une structure de groupe pro-algébrique affine complexe.
(b) Le groupe $Aut^{\otimes}(\omega)$ s'identifie, en tant que groupe pro-algébrique affine complexe, au groupe $\mathbb{Z}^{alg} := Hom_{gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \times \mathbb{C}$, par le morphisme

$$\begin{array}{ccccc} Hom_{gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) & \times & \mathbb{C} & \to & Aut^{\otimes}(\omega) \\ (\gamma & , & \lambda) & \mapsto & \Phi_{(\gamma,\lambda)} \end{array}$$

où $\Phi_{(\gamma,\lambda)}$ est donné, pour tout objet $(\mathbb{C}^n, A)$ de $\mathcal{R}$, et avec les notations de la partie 4.1*, par*

$$\Phi_{(\gamma,\lambda)}(A) = \gamma(A_s)A_u^{\lambda}$$

(c) Le foncteur de la catégorie $\mathcal{R}$ vers la catégorie des représentations rationnelles de $\mathbb{Z}^{alg}$ donné sur les objets par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \to & \mathcal{R}ep(\mathbb{Z}^{alg}) \\ (\mathbb{C}^n, A) & \rightsquigarrow & \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{alg} & \to & GL_n(\mathbb{C}) \\ (\gamma, \lambda) & \mapsto & \gamma(A_s)A_u^\lambda \end{array} \right) \end{array}$$

définit une équivalence de catégories (tannakiennes).

Démonstration.
(a) et *(c)* : *cf* [**?**] p.130
(b) : *cf* [**?**] Annexe A □

Définition 4.3.10. *On appelle enveloppe pro-algébrique de $\mathbb{Z}$, ou groupe de Galois de la catégorie $\mathcal{R}$, le groupe pro-algébrique affine complexe*

$$\mathbb{Z}^{alg} = Hom_{gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \times \mathbb{C}$$

L'exemple 4.3.8 *et le théorème* 4.3.9 *(b) permettent d'identifier $\mathbb{Z}$ à un sous-groupe de $\mathbb{Z}^{alg}$. L'identification est donnée par*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \hookrightarrow & Hom_{gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) & \times & \mathbb{C} \\ k & \mapsto & (c \mapsto c^k & , & k) \end{array}$$

Le groupe de Galois d'un objet de $\mathcal{R}$

Soit $(\mathbb{C}^n, A)$ un objet de $\mathcal{R}$. On peut définir la sous-catégorie tannakienne de $\mathcal{R}$ engendrée par l'objet $(\mathbb{C}^n, A)$. On la note $\{\{(\mathbb{C}^n, A)\}\}$. Essentiellement, ses objets sont obtenus à partir de l'objet $(\mathbb{C}^n, A)$ en combinant des « opérations de l'algèbre linéaire »[4]. La restriction $\omega_|$ du foncteur fibre ω à la catégorie $\{\{(\mathbb{C}^n, A)\}\}$ est un foncteur fibre pour la catégorie tannakienne $\{\{(\mathbb{C}^n, A)\}\}$, et qui fait de la catégorie $\{\{(\mathbb{C}^n, A)\}\}$ une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$.

La catégorie tannakienne $\{\{(\mathbb{C}^n, A)\}\}$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{R}$, et stable par produit tensoriel. Aussi, tout automorphisme tensoriel $\Phi \in Aut^{\otimes}(\omega)$ se restreint naturellement en un automorphisme tensoriel $\Phi \in Aut^{\otimes}(\omega_|)$.

Proposition 4.3.11. *Le morphisme de restriction $Aut^{\otimes}(\omega) \to Aut^{\otimes}(\omega_|)$ est surjectif.*

En identifiant $\mathbb{Z}^{alg}$ à $Aut^{\otimes}(\omega)$, on a le morphisme surjectif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} Hom_{gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) & \times & \mathbb{C} & \to & Aut^{\otimes}(\omega_|) \\ (\gamma & , & \lambda) & \mapsto & \Phi_{(\gamma,\lambda)} \end{array}$$

où $\Phi_{(\gamma,\lambda)}$ est donné, pour tout objet $(\mathbb{C}^p, B)$ de $\{\{(\mathbb{C}^n, A)\}\}$, et avec les notations de la partie 4.1, par

$$\Phi_{(\gamma,\lambda)}(B) = \gamma(B_s)B_u^\lambda$$

Cependant, tout objet $(\mathbb{C}^p, B)$ de $\{\{(\mathbb{C}^n, A)\}\}$ est obtenu, à partir de l'objet $(\mathbb{C}^n, A)$, par des « opérations de l'algèbre linéaire ». Aussi, l'automorphisme tensoriel $\Phi_{(\gamma,\lambda)}$ de $Aut^{\otimes}(\omega_|)$ est complètement déterminé par $\Phi_{(\gamma,\lambda)}(A) = \gamma(A_s)A_u^\lambda$.

Cela permet d'identifier $Aut^{\otimes}(\omega_|)$ au sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ suivant :

$$\{\gamma(A_s)A_u^\lambda\,;\, (\gamma, \lambda) \in Hom_{gr}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) \times \mathbb{C}\}$$

[4]Ces opérations sont données par la structure de catégorie tannakienne de $\mathcal{R}$, que l'on n'a pas décrite dans son intégralité. Le produit tensoriel est un exemple d'une telle opération. On peut également citer comme exemples, bien que ce n'ait pas été bien défini ici, la somme directe, le dual, les puissances symétriques, les noyaux et les conoyaux.

On remarque, d'après les résultats de la partie 4.1, que ce groupe est exactement le sous-groupe algébrique monogène $G(A)$ de $GL_n(\mathbb{C})$ engendré par la matrice A. Ce groupe est le groupe de Galois[5] de l'objet $(\mathbb{C}^n, A)$ de la catégorie tannakienne $\mathcal{R}$. On pourrait le noter $\mathbb{Z}^{alg}(\mathbb{C}^n, A)$.

4.3.2 Le groupe de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants

De façon analogue à la théorie de Galois classique, la théorie de Picard-Vessiot permet de définir un groupe de Galois différentiel pour les équations différentielles linéaires.
Essentiellement, le groupe de Galois d'une équation différentielle est le groupe des automorphismes, qui commutent à la dérivation, d'une extension du corps de fonctions de base engendrée par un système fondamental de solutions.
Cette définition peut être retrouvée par dualité tannakienne. Dans ce cas, le foncteur fibre considéré est un foncteur de solutions.

La catégorie des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants peut être munie d'une structure de catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$. Cependant, pour obtenir un groupe pro-algébrique affine sur le corps $\mathbb{C}$, il n'est pas possible de choisir, comme dans le cas différentiel, un foncteur fibre de solutions analytiques. En effet, le corps des constantes de la théorie des équations aux q-différences n'est pas $\mathbb{C}$, c'est le corps $\mathcal{M}(\mathbb{C})^{\sigma_q}$ des fonctions elliptiques, et les espaces vectoriels de solutions sont donc des espaces vectoriels sur le corps $\mathcal{M}(\mathbb{C})^{\sigma_q}$.

D'autres choix sont possibles pour le foncteur fibre. Van der Put et Singer, dans [**?**], choisissent un foncteur fibre de solutions symboliques, pour lesquelles le corps des constantes est $\mathbb{C}$. Sauloy, dans [**?**] et [**?**], choisit un foncteur fibre, et même une famille de foncteurs fibres, qui définissent des « conditions initiales ». Un théorème de Deligne assure que les groupes de Galois définis par ces différents choix sont isomorphes.

On rappele ici, toujours brièvement, la description de la catégorie tannakienne des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants, et la famille de foncteurs fibres définis dans [**?**].
On verra que cette catégorie contient, comme sous-catégorie essentielle, la catégorie $\mathcal{R}$ décrite dans la partie 4.3.1 précédente, et que cela permet de décrire son groupe de Galois comme un sous-groupe de $\mathbb{Z}^{alg}$.
Plus qu'un groupe, la famille de foncteurs fibres définis dans [**?**] met en évidence, on le rappellera, un groupoïde ensembliste de Galois, dont les flèches sont les isomorphismes tensoriels entre deux foncteurs fibres de cette famille.

La catégorie tannakienne des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants

On rappelle que deux systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants $\sigma_q X = AX$ et $\sigma_q X = BX$, avec $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B \in GL_n(\mathbb{C})$, sont rationnellements équivalents s'il existe une transformation de jauge $F(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$ telle que

$$BF(z) = F(qz)A$$

De plus, d'après le lemme 2.1.3.2 de [**?**], p.17, cette équation fonctionnelle impose que la tranformation de jauge F est un polynôme de Laurent, c'est-à-dire que l'on a $F(z) \in GL_n(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$.

Cela justifie la définition 4.3.12 ci-dessous, de la catégorie des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants.

[5] La terminologie groupe de Galois pour le groupe $G(A)$ est relative à la catégorie tannakienne $\mathcal{R}$.

Définition 4.3.12. *On note*[6] $\mathcal{P}$ *la catégorie dont les objets sont les couples* $(\mathbb{C}^n, A)$ *constitués d'un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}^n$ *de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$ *et d'une matrice* $A \in GL_n(\mathbb{C})$*, et dont les morphismes d'un objet* $(\mathbb{C}^n, A)$ *vers un objet* $(\mathbb{C}^p, B)$ *sont les matrices* $F \in M_{p,n}(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$ *telles que* $BF(qz) = F(z)A$ *dans* $M_{p,n}(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$*.*
On note $Hom_{\mathcal{P}}((\mathbb{C}^n, A), (\mathbb{C}^p, B))$ *l'ensemble des morphismes de* $\mathcal{P}$ *de l'objet* $(\mathbb{C}^n, A)$ *vers l'objet* $(\mathbb{C}^p, B)$*.*

On définit le produit tensoriel et une famille de foncteurs fibres qui, essentiellement, font de la catégorie $\mathcal{P}$ une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$.

Définition 4.3.13.
- Pour deux objets $(\mathbb{C}^n, A)$ *et* $(\mathbb{C}^p, B)$ *de* $\mathcal{P}$*, le produit tensoriel de ces deux objets est l'objet de* $\mathcal{P}$ *:*

$$(\mathbb{C}^n, A) \otimes (\mathbb{C}^p, B) = (\mathbb{C}^{np}, A \otimes B)$$

où $A \otimes B$ *représente la matrice de* $GL_{np}(\mathbb{C})$ *dont le coefficient de la* $\phi(i, j)$*-ème ligne et de la* $\phi(k, l)$*-ème colonne est* $A_{i,k}B_{j,l}$*.*
- Pour deux morphismes $F(z) \in Hom_{\mathcal{P}}((\mathbb{C}^n, A), (\mathbb{C}^p, B))$ *et* $G(z) \in Hom_{\mathcal{P}}((\mathbb{C}^{n'}, A'), (\mathbb{C}^{p'}, B'))$*, le produit tensoriel de ces deux morphismes est le morphisme de* $\mathcal{P}$ *:*

$$F(z) \otimes G(z) \in Hom_{\mathcal{R}}((\mathbb{C}^{nn'}, A \otimes A'), (\mathbb{C}^{pp'}, B \otimes B'))$$

où $F(z) \otimes G(z)$ *représente la matrice de* $M_{pp',nn'}(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$ *dont le coefficient de la* $\phi(i, j)$*-ème ligne et de la* $\phi(k, l)$*-ème colonne est* $F_{i,k}(z)G_{j,l}(z)$*.*

Définition 4.3.14. *Pour tout* $z_0 \in \mathbb{C}^*$*, on note* ω_{z_0} *le foncteur de la catégorie* $\mathcal{P}$ *vers* $\mathcal{V}$ *défini, pour un objet* $(\mathbb{C}^n, A)$ *de* $\mathcal{P}$*, par* $\omega_{z_0}(\mathbb{C}^n, A) = \mathbb{C}^n$*, et pour un morphisme* $F(z) \in Hom_{\mathcal{P}}((\mathbb{C}^n, A), (\mathbb{C}^p, B))$*, par* $\omega_{z_0}(F) = F(z_0) \in Hom_{\mathcal{V}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$*.*

Pour deux objets $(\mathbb{C}^n, A)$ et $(\mathbb{C}^p, B)$ de $\mathcal{P}$, on a $\omega_{z_0}((\mathbb{C}^n, A) \otimes (\mathbb{C}^p, B)) = \omega_{z_0}(\mathbb{C}^n, A) \otimes \omega_{z_0}(\mathbb{C}^p, B)$. Pour deux morphismes $F(z)$ et $G(z)$ de $\mathcal{P}$, on a $\omega_{z_0}(F(z) \otimes G(z)) = \omega_{z_0}(F(z)) \otimes \omega_{z_0}(G(z))$. Le foncteur ω_{z_0} est dit tensoriel.

Proposition 4.3.15. *La catégorie* $\mathcal{P}$*, munie du produit tensoriel de la définition* 4.3.13 *et d'un foncteur* ω_{z_0} *de la définition* 4.3.14*, a une structure de catégorie tannakienne neutre sur* $\mathbb{C}$*.*

On dit que les foncteurs ω_{z_0}, pour $z_0 \in \mathbb{C}^*$, sont des foncteurs fibres pour la catégorie tannakienne $\mathcal{P}$.

Le groupe de Galois de la catégorie tannakienne des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants

Définition 4.3.16. *Soient* $z_0, z_1 \in \mathbb{C}^*$*.*
- Un morphisme Φ *entre les foncteurs* ω_{z_0} *et* ω_{z_1} *est la donnée, pour tout objet* $(\mathbb{C}^n, A)$ *de* $\mathcal{P}$*, d'un morphisme* $\Phi(A) \in Hom_{\mathcal{V}}(\omega_{z_0}(\mathbb{C}^n, A), \omega_{z_1}(\mathbb{C}^n, A))$*, de sorte que l'on ait, pour tout morphisme* $F(z) \in Hom_{\mathcal{P}}((\mathbb{C}^n, A), (\mathbb{C}^p, B))$*, le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}^n = \omega_{z_0}(\mathbb{C}^n, A) & \xrightarrow{\Phi(A)} & \omega_{z_1}(\mathbb{C}^n, A) = \mathbb{C}^n \\
{\scriptstyle F(z_0)=\omega_{z_0}(F(z))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega_{z_1}(F(z))=F(z_1)} \\
\mathbb{C}^p = \omega_{z_0}(\mathbb{C}^p, B) & \xrightarrow{\Phi(B)} & \omega_{z_1}(\mathbb{C}^p, B) = \mathbb{C}^p
\end{array}$$

[6] La notation $\mathcal{P}$ vient de l'interprétation géométrique donnée dans [**?**], 2.3, p. 21, d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants comme un fibré plat (c'est-à-dire pour lequel les matrices de transitions sont des matrices constantes) sur le tore complexe $E_q = \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$.

- Un isomorphisme entre les foncteurs ω_{z_0} et ω_{z_1} est un morphisme Φ entre les foncteurs ω_{z_0} et ω_{z_1} tel que $\Phi(A)$ est inversible, pour tout objet $(\mathbb{C}^n, A)$ de $\mathcal{P}$.
- Un automorphisme Φ entre les foncteurs ω_{z_0} et ω_{z_1} est dit tensoriel, ou $\otimes$-compatible, si pour tout couple d'objets $((\mathbb{C}^n, A), (\mathbb{C}^p, B))$ de $\mathcal{P}$, on a $\Phi(A \otimes B) = \Phi(A) \otimes \Phi(B)$.
On note $Iso^{\otimes}(\omega_{z_0}, \omega_{z_1})$ l'ensemble des isomorphismes tensoriels entre les foncteurs ω_{z_0} et ω_{z_1} et l'on a $Aut^{\otimes}(\omega_{z_0}) = Iso^{\otimes}(\omega_{z_0}, \omega_{z_0})$.

Les catégories $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}$ ont les mêmes objets et tout morphisme de la catégorie $\mathcal{R}$ s'interprète comme un morphisme (à coefficients constants) de la catégorie $\mathcal{P}$. La catégorie $\mathcal{R}$ est donc une sous-catégorie essentielle (mais pas une sous-catégorie pleine) de la catégorie $\mathcal{P}$.
De plus, le produit tensoriel de la catégorie $\mathcal{P}$ se restreint à la catégorie $\mathcal{R}$, et sa restriction est le produit tensoriel de la catégorie $\mathcal{R}$, et tout foncteur fibre ω_{z_0} de la catégorie $\mathcal{P}$ se restreint à la catégorie $\mathcal{R}$, et sa restriction est le foncteur fibre ω de la catégorie $\mathcal{R}$.
Aussi, on a une application injective naturelle

$$Iso^{\otimes}(\omega_{z_0}, \omega_{z_1}) \hookrightarrow Aut^{\otimes}(\omega)$$

qui permet d'identifier $Iso^{\otimes}(\omega_{z_0}, \omega_{z_1})$ à un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^{alg}$, et donc $Aut^{\otimes}(\omega_{z_0})$ à un sous-ensemble (qui est évidemment un sous-groupe) de $\mathbb{Z}^{alg}$.

Théorème 4.3.17. *Avec l'identification donnée par le théorème 4.3.9, (b), on a, pour tous $z_0, z_1 \in \mathbb{C}^*$,*

$$Iso^{\otimes}(\omega_{z_0}, \omega_{z_1}) = \{(\gamma, \lambda) \in \mathbb{Z}^{alg} \,:\, \gamma(q)z_0 = z_1\}$$

et

$$Aut^{\otimes}(\omega_{z_0}) = \{(\gamma, \lambda) \in \mathbb{Z}^{alg} \,:\, \gamma(q) = 1\}$$

Démonstration. cf [?], 2.2.2.1, p. 18. □

Définition 4.3.18. *On appelle groupe de Galois de la catégorie $\mathcal{P}$ des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants le groupe*

$$Gal = \{(\gamma, \lambda) \in \mathbb{Z}^{alg} \,:\, \gamma(q) = 1\}$$

On appelle groupoïde ensembliste de Galois de la catégorie $\mathcal{P}$ des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants, le groupoïde ensembliste, que l'on note encore Gal, dont les objets sont les points de $\mathbb{C}^*$ et dont l'ensemble des flèches du point z_0 vers le point z_1 est l'ensemble

$$Gal(z_0, z_1) = \{(\gamma, \lambda) \in \mathbb{Z}^{alg} \,:\, \gamma(q)z_0 = z_1\}$$

Le groupe de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants

Soit $\sigma_q X = AX$ un système aux q-différences linéaire à coefficients constants, défini par une matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On considère l'objet $(\mathbb{C}^n, A)$ de $\mathcal{P}$ qu'il définit.

De la même façon que l'on définit un groupe de Galois pour un objet de la catégorie tannakienne $\mathcal{R}$, on définit un groupe de Galois, et même un groupoïde ensembliste de Galois, pour un objet de la catégorie tannakienne $\mathcal{P}$.

Définition 4.3.19. *On appelle groupe de Galois du système aux q-différences linéaire à coefficients constants $\sigma_q X = AX$, le sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$:*

$$Gal(A) = \{\gamma(A_s)A_u^{\lambda}\,;\, (\gamma, \lambda) \in Gal\}$$

On appelle groupoïde ensembliste de Galois du système aux q-différences linéaire à coefficients constants $\sigma_q X = AX$, le groupoïde ensembliste, que l'on note encore $Gal(A)$, dont les objets sont les points de $\mathbb{C}^*$ et dont l'ensemble des flèches du point z_0 vers le point z_1 est l'ensemble

$$Gal(A)(z_0, z_1) = \{\gamma(A_s)A_u^{\lambda}\,;\, (\gamma, \lambda) \in Gal(z_0, z_1)\}$$

4.4 Comparaison du D-groupoïde de Galois et du groupe de Galois

Soit $\sigma_q X = AX$ un système aux q-différences linéaire à coefficients constants, défini par une matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

4.4.1 Comparaison du D-groupoïde de Galois et du groupoïde ensembliste de Galois

On rappelle que, d'après le théorème 4.2.7, le D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A)$ est déterminé par le sous-groupe algébrique monogène $G(J)$ de $GL_n(\mathbb{C})$, engendré par la matrice

$$J = diag(q, A) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$$

et que les solutions $sol(\mathcal{G}al(A))$ sont les germes des difféomorphismes (globaux) de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \beta X)$, avec $diag(\alpha, \beta) \in G(J)$.

D'après les résultats de structure énoncés dans la partie 4.1, le groupe $G(J)$ est

$$G(J) = \{\gamma(J_s)J_u^\lambda \,;\, (\gamma, \lambda) \in \mathbb{Z}^{alg}\}$$

Or, pour tout $(\gamma, \lambda) \in \mathbb{Z}^{alg}$, on a

$$\gamma(J_s)J_u^\lambda = \begin{pmatrix} \gamma(q) & 0 \\ 0 & \gamma(A_s)A_u^\lambda \end{pmatrix}$$

Aussi, on a le :

Théorème 4.4.1. *Les solutions $sol(\mathcal{G}al(A))$ du D-groupoïde de Galois du système aux q-différences linéaire à coefficients constants $\sigma_q X = AX$ sont les difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme*

$$(z, X) \mapsto (\gamma(q)z, \gamma(A_s)A_u^\lambda X)$$

avec $(\gamma, \lambda) \in \mathbb{Z}^{alg}$.
Pour deux points $z_0, z_1 \in \mathbb{C}^*$, les solutions du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A)$ qui transforment la transversale $\{z_0\} \times \mathbb{C}^n$ en la transversale $\{z_1\} \times \mathbb{C}^n$ sont les difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme

$$(z, X) \mapsto (\frac{z_1}{z_0}z, \beta X)$$

avec $\beta \in Gal(A)(z_0, z_1)$.

4.4.2 Comparaison du D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales et du groupe de Galois

On rappelle que, d'après le théorème 4.2.9, le D-sous-groupoïde de Galois $\widetilde{\mathcal{G}al}(A)$ est déterminé par le sous-groupe algébrique G_A de $GL_n(\mathbb{C})$ défini par

$$G_A = \{\beta \in GL_n(\mathbb{C}) \,;\, diag(1, \beta) \in G(J)\} \subset GL_n(\mathbb{C})$$

et que les solutions $sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(A))$ sont les germes des difféomorphismes (globaux) de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme $(z, X) \mapsto (\,\beta X)$, avec $\beta \in G_A$.

Or, d'après la définition 4.3.19 du groupe Gal et la description du groupe monogène $G(J)$, on a :

$$G_A = \{\gamma(A_s)A_u^\lambda \,;\, (\gamma, \lambda) \in Gal\}$$

Théorème 4.4.2. *Les solutions $sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(A))$ du D-sous-groupoïde de Galois qui fixe les transversales du système aux q-différences linéaire à coefficients constants $\sigma_q X = AX$ sont les difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme*

$$(z, X) \mapsto (z, \gamma(A_s)A_u^{\lambda}X)$$

avec $(\gamma, \lambda) \in Gal$.
Pour un point $z_0 \in P^1\mathbb{C}$, les solutions du D-sous-groupoïde de Galois $\widetilde{\mathcal{G}al}(A)$ au-dessus de la transversale $\{z_0\} \times \mathbb{C}^n$ sont les difféomorphismes de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de la forme

$$(z, X) \mapsto (z, \beta X)$$

avec $\beta \in Gal(A)$.
On a donc, pour tout $z_0 \in P^1\mathbb{C}$,

$$Sol_{z_0}(\widetilde{\mathcal{G}al}(A)) = Gal(A)$$

Chapitre 5

Un D-groupoïde de Galois local pour les systèmes aux q-différences fuchsiens

Le D-groupoïde de Galois d'un système différentiel linéaire donne, en considérant les solutions qui fixent les transversales du feuilletage, un groupe algébrique de matrices constantes. Plus particulièrement, les transformations d'holonomie qui fixent les transversales du feuilletage donnent, comme sous-groupe de ce goupe algébrique, une réalisation du groupe de monodromie du système.

On a montré, dans le chapitre 3, que le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire définit également, en considérant les solutions qui fixent les transversales de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, des groupes de matrices. Cependant, aucun élément non trivial de la dynamique du système ne fixe les transversales de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. On ne peut donc donner, de façon analogue au cas différentiel, une interprétation dynamique immédiate à aucun élément de ces groupes.

Dans le cas particulier des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants, les calculs explicites du chapitre 4 assurent que ces groupes donnent exactement une réalisation du groupe de Galois du système.

Un système aux q-différences linéaire fuchsien est localement équivalent à un système aux q-différences linéaire à coefficients constants. Aussi, la motivation de ce chapitre est de comprendre le lien entre le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences fuchsien, et le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences à coefficients constants localement équivalent au système fuchsien, quitte à définir des D-groupoïdes de Galois locaux. Le but est de pouvoir identifier, en utilisant les résultats du chapitre 4, les éléments du groupe de Galois local du système fuchsien à des solutions qui fixent les transversales de son D-groupoïde de Galois.

Plus généralement, la compréhension du lien entre les D-groupoïdes de Galois de deux systèmes aux q-différences linéaires équivalents est une question naturelle. Deux systèmes aux q-différences linéaires rationnels sont équivalents si, essentiellement, on peut transformer l'un en l'autre par un changement linéaire et rationnel de fonction inconnue. On va montrer que l'on établit facilement une conjugaison entre les dynamiques de deux tels systèmes. Il est donc naturel de se demander si cette conjugaison vaut encore pour leurs D-enveloppes, c'est-à-dire pour les D-groupoïdes de Galois des systèmes aux q-différences considérés.

Dans ce chapitre, on commence par mettre en évidence une conjugaison entre les dynamiques de deux systèmes aux q-différences linéaires équivalents.

Dans une seconde partie, on montre que cette conjugaison définit, en dehors d'un lieu singulier, un comorphisme qui préserve la structure de D-groupoïde.

Ensuite, on montre que dans le cas particulier de deux systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants équivalents, ce comorphisme conjugue les D-groupoïdes de Galois.

Pour finir, on définit un D-groupoïde de Galois local pour les systèmes aux q-différences fuch-

siens. On montre qu'il redonne le groupe de Galois local du système.

Pour ce chapitre, on considère $\sigma_q X = AX$ et $\sigma_q X = BX$ deux systèmes aux q-différences linéaires rationnels équivalents, définis par des matrices $A(z), B(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, et l'on considère également une transformation de jauge rationnelle $F(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$ de $A(z)$ vers $B(z)$.

On notera M la variété analytique complexe $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$.

5.1 Conjugaison des dynamiques

Dans cette partie, on va montrer que, en dehors d'un lieu singulier, les dynamiques des systèmes aux q-différences équivalents $\sigma_q X = AX$ et $\sigma_q X = BX$ sont conjuguées.

5.1.1 Lemme

On rappelle que les dynamiques des systèmes aux q-différences $\sigma_q X = AX$ et $\sigma_q X = BX$ sont, en reprenant les notations de la définition 2.2.1, les sous-groupoïdes ensemblistes de $Aut(P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)$ suivants :

$$Dyn(A(z)) = \{(z, X) \mapsto (q^k z, A_k(z)X)\} \quad \text{et} \quad Dyn(B(z)) = \{(z, X) \mapsto (q^k z, B_k(z)X)\}$$

$$\text{avec} \quad A_k(z) = \begin{cases} Id_n & \text{si } k = 0 \\ \prod_{i=0}^{k-1} A(q^i z) & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \\ \prod_{i=k}^{-1} A(q^i z)^{-1} & \text{si } k \in -\mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{et} \quad B_k(z) = \begin{cases} Id_n & \text{si } k = 0 \\ \prod_{i=0}^{k-1} B(q^i z) & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \\ \prod_{i=k}^{-1} B(q^i z)^{-1} & \text{si } k \in -\mathbb{N}^* \end{cases}$$

Lemme 5.1.1. *Pour tous les entiers $k \in \mathbb{Z}$, on a dans $GL_n(\mathbb{C}(z))$ les relations :*

$$B_k(z) = F(q^k z) A_k(z) F(z)^{-1}$$

Démonstration. La transformation de jauge $F(z)$ de $A(z)$ vers $B(z)$ vérifie, dans $GL_n(\mathbb{C}(z))$, la relation $B(z) = F(qz)A(z)F(z)^{-1}$, et donc, pour tous les entiers $i \in \mathbb{Z}$, les relations $B(q^i z) = F(q^{i+1}z)A(q^i z)F(q^i z)^{-1}$. La conclusion en découle par multiplication. □

5.1.2 Définition de la conjugaison

On note $S(F)$ le lieu singulier de la matrice $F(z)$, c'est-à-dire le sous-ensemble fini de $P^1\mathbb{C}$ formé des pôles de $F(z)$ et des pôles de $F(z)^{-1}$.

On considère le difféomorphisme méromorphe de la variété analytique complexe $M = P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ suivant :

$$\begin{array}{rccc} f: & P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n & \to & P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \\ & (z, X) & \mapsto & (z, F(z)X) \end{array}$$

Le lieu singulier de ce difféomorphisme, c'est-à-dire l'ensemble formé des pôles de f et des pôles de f^{-1}, est $S(F) \times \mathbb{C}^n \subset M$.
L'application f définit donc un difféomorphisme (holomorphe global) de l'ouvert

$$M^* = (P^1\mathbb{C} \setminus S(F)) \times \mathbb{C}^n$$

et préserve ses transversales. On munit M^* de la structure de variété analytique complexe induite par M.

On rappelle que l'on note $Aut(M^*)$ le groupoïde ensembliste sur M^* des germes de difféomorphismes locaux de M^*. Il a été défini dans l'exemple 1.2.2.
On considère la bijection

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & Aut(M^*) & \to & Aut(M^*) \\ & [g : (M^*, a) \mapsto (M^*, g(a))] & \mapsto & [f \circ g \circ f^{-1} : (M^*, f(a)) \mapsto (M^*, f(g(a)))] \end{array}$$

Cette application préserve la structure de groupoïde ensembliste de $Aut(M^*)$. Plus précisément, on vérifie facilement la :

Propriété 5.1.2. *En reprenant les notations de l'exemple* 1.2.2*, les applications qui définissent la structure de groupoïde ensembliste de $Aut(M^*)$ vérifient, avec les applications f et φ que l'on vient de définir, les relations de commutativité suivantes :*
- $s \circ \varphi = f \circ s$,
- $t \circ \varphi = f \circ t$,
- $c \circ (\varphi \times_M \varphi) = \varphi \circ c$,
- $e = \varphi \circ e$,
- $i \circ \varphi = \varphi \circ i$,
et par conséquent, l'image par φ de tout sous-groupoïde ensembliste de $Aut(M^*)$ est un sous-groupoïde ensembliste de $Aut(M^*)$.

On qualifiera la bijection φ de conjugaison sur $Aut(M^*)$. Elle dépend de l'application f et de son inverse, et ne s'étend donc pas à $Aut(M)$.

Cette application a été construite de façon à conjuguer, partout où cela est possible[1], les dynamiques $Dyn(A(z))$ et $Dyn(B(z))$ des systèmes aux q-différences $\sigma_q X = AX$ et $\sigma_q X = BX$. Précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 5.1.3. *On a :*

$$\varphi\left[Dyn(A(z)) \cap Aut(M^*)\right] = Dyn(B(z)) \cap Aut(M^*)$$

Démonstration. On vérifie que pour tout élément $[(z, X) \mapsto (q^k z, A_k(z)X)]$ de $Dyn(A(z))$ dont la source et le but sont des points de M^*, on a la relation

$$f \circ [(z, X) \mapsto (q^k z, A_k(z)X)] \circ f^{-1} = [(z, X) \mapsto (q^k z, F(q^k z)A_k(z)F(z)^{-1}X)]$$

Réciproquement, pour tout élément $[(z, X) \mapsto (q^k z, B_k(z)X)]$ de $Dyn(B(z))$ dont la source et le but sont des points de M^*, on a la relation

$$f^{-1} \circ [(z, X) \mapsto (q^k z, B_k(z)X)] \circ f = [(z, X) \mapsto (q^k z, F(q^k z)^{-1}B_k(z)F(z)X)]$$

Le lemme 5.1.1 permet de conclure. □

Une autre interprétation : un changement de coordonnées

Le système aux q-différences linéaire défini par la matrice $B(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$ s'obtient, à partir du système $\sigma_q X = AX$, par le changement de fonction inconnue $Y = F(z)X$.
Aussi, on considère sur $M^* = (P^1\mathbb{C} \setminus S(F)) \times \mathbb{C}^n$ les coordonnées globales (z, Y) définies par

$$(z, Y) = (z, F(z)X)$$

[1] On rappelle que les éléments de la dynamique d'un système aux q-différences sont, par définition, des germes de difféomorphismes locaux (holomorphes) de $M = P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$.

Les expressions des éléments de $Dyn(B(z)) \cap Aut(M^*)$ à l'aide des coordonnées $(z, Y) = (z, F(z)X)$ sont :

$$(z, Y) \to (q^k z, F(q^k z)^{-1} B_k(z) F(z) Y)$$

ce qui s'écrit encore, d'après le lemme 5.1.1,

$$(z, Y) \to (q^k z, A_k(z) Y)$$

5.1.3 Exemples

L'équation des constantes

Soit $l \in \mathbb{Z}$. L'équation $x(qz) = q^l x(z)$ est équivalente à l'équation des constantes $x(qz) = x(z)$. Une transformation de jauge de 1 vers q^l est z^l. Son lieu singulier est $\{0, \infty\} \subset P^1\mathbb{C}$.
On peut vérifier que sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, on a $[(z, x) \mapsto (z, z^l x)] \circ [(z, x) \mapsto (q^k z, x)] \circ [(z, x) \mapsto (z, z^{-l} x)] = [(z, x) \mapsto (q^k z, (q^k z)^l z^{-l} x)] = [(z, x) \mapsto (q^k z, q^{kl} x)]$,
ce que l'on note

$$[(z, x) \mapsto (z, z^l x)] \circ Dyn(1) \circ [(z, x) \mapsto (z, z^l x)]^{-1} = Dyn(q^l)$$

Les équations des caractères

Plus généralement, on peut vérifier que deux équations de caractères $x(qz) = ax(z)$ et $x(qz) = bx(z)$, d'exposants $a, b \in \mathbb{C}^*$, sont conjuguées si et seulement s'il existe un entier $l \in \mathbb{Z}$ tel que $b = aq^l$. Dans ce cas, une transformation de jauge de a vers b est encore z^l.
On peut vérifier que sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, on a $[(z, x) \mapsto (z, z^l x)] \circ [(z, x) \mapsto (q^k z, a^k x)] \circ [(z, x) \mapsto (z, z^{-l} x)] = [(z, x) \mapsto (q^k z, (q^k z)^l a^k z^{-l} x)] = [(z, x) \mapsto (q^k z, (aq^l)^k x)]$,
ce que l'on note

$$[(z, x) \mapsto (z, z^l x)] \circ Dyn(a) \circ [(z, x) \mapsto (z, z^l x)]^{-1} = Dyn(b)$$

Le système du logarithme

Le système du logarithme $\sigma_q X = LX$, avec $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, est obtenu par vectorialisation de l'équation aux q-différences linéaire $x(q^2 z) - 2x(qz) + x(z) = 0$, qui est une linéarisation de l'équation du logarithme $x(qz) = x(z) + 1$. La dynamique de ce système est, d'après l'exercice 2.2.5,

$$Dyn(L) = \{(z, X) \mapsto (q^k z, \begin{pmatrix} 1+k & -k \\ k & 1-k \end{pmatrix} X)\}$$

A partir de l'équation du logarithme $x(qz) = x(z) + 1$, on obtient également, en posant $y = 1$, le système aux q-différences

$$\begin{cases} \sigma_q x = x + y \\ \sigma_q y = y \end{cases}$$

qui s'écrit encore $\sigma_q X = UX$, avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La dynamique de ce système est

$$Dyn(U) = \{(z, X) \mapsto (q^k z, \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X)\}$$

Les matrices L et U sont conjuguées. On a $L = PUP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Aussi, les systèmes aux q-différences $\sigma_q X = LX$ et $\sigma_q X = UX$ sont équivalents, et la matrice $P \in GL_2(\mathbb{C}) \subset GL_2(\mathbb{C}(z))$ est une transformation de jauge de U vers L. Le lieu singulier de $P \in GL_2(\mathbb{C}(z))$ est $S(P) = \emptyset$.
On peut vérifier que sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$, on a $[(z, X) \mapsto (z, PX)] \circ [(z, X) \mapsto (q^k z, U^k X)] \circ [(z, X) \mapsto (z, P^{-1} X)] = [(z, X) \mapsto (q^k z, PU^k P^{-1} X)] = [(z, X) \mapsto (q^k z, L^k X)]$,
ce que l'on note

$$[(z, X) \mapsto (z, PX)] \circ Dyn(U) \circ [(z, X) \mapsto (z, PX)]^{-1} = Dyn(L)$$

5.2 Transport de la structure de D-groupoïde sur M^*

Dans cette partie, on va montrer que la conjugaison $\varphi : Aut(M^*) \to Aut(M^*)$ induit naturellement un comorphisme, dont la définition est à préciser, qui permet de transporter tout D-groupoïde défini sur $M^* = (P^1\mathbb{C} \setminus S(F)) \times \mathbb{C}^n$.

5.2.1 Transport de la structure de groupoïde d'ordre fini sur M^*

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, la conjugaison $\varphi : Aut(M^*) \to Aut(M^*)$ induit une bijection

$$\begin{array}{rccl} \varphi_r : & |J_r^*(M^*, M^*)| & \to & |J_r^*(M^*, M^*)| \\ & j_a^r(g)_b & \mapsto & j_{f(a)}^r(f \circ g \circ f^{-1})_{f(b)} = j_b^r(f)_{f(b)} \circ j_a^r(g)_b \circ (j_a^r(f)_{f(a)})^{-1} \end{array}$$

Les bijections $\varphi_r : |J_r^*(M^*, M^*)| \to |J_r^*(M^*, M^*)|$ proviennent de la conjugaison φ et commutent donc aux projections $|\pi|_r^{r+l} : |J_{r+l}^*(M^*, M^*)| \to |J_r^*(M^*, M^*)|$ données dans la définition 1.1.20. On a $|\pi|_r^{r+l} \circ \varphi_{r+l} = \varphi_r \circ |\pi|_r^{r+l}$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, les images par les applications φ_r des coordonnées source et but d'un r-jet sont

$$\varphi_r(z, X, \bar{z}, \bar{X}) = (z, F(z)X, \bar{z}, F(\bar{z})\bar{X})$$

En particulier, on a $\varphi_0 = f \times f$.
Ensuite, pour $r \geq 1$, les images par φ_r des coordonnées qui représentent les dérivées partielles premières d'un r-jet sont données par

$$\varphi_r \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X} \\ \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial X}{\partial X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(\bar{z})\bar{X} & F(\bar{z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial X} \\ \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial X}{\partial X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial F^{-1}}{\partial z}(z)X & F(z)^{-1} \end{pmatrix}$$

Plus généralement, les coordonnées qui représentent les dérivées partielles de l'image par φ_r d'un r-jet de difféomorphisme local de M^*, dépendent holomorphiquement des coordonnées source et but du r-jet, et polynomialement des coordonnées qui représentent les dérivées partielles du r-jet.

On peut donc associer à φ_r, le comorphisme[2]

$$\begin{array}{rccl} \varphi_r^* : & \mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)} & \to & (\varphi_0)_*\mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)} \\ & E & \mapsto & E \circ \varphi_r \end{array}$$

Le faisceau $(\varphi_0)_*\mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)}$ est l'image directe par l'homéomorphisme φ_0 de $(M^*)^2$ (identifié à $|J_0^*(M^*, M^*)|$) du faisceau $\mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)}$.
Le comorphisme φ_r^* est un isomorphisme de faisceaux de $\mathbb{C}$-algèbres sur $(M^*)^2$. Précisons que pour une équation E de $\mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)}$ définie sur un ouvert Ω de $(M^*)^2$, l'image $\varphi_r^*E = E \circ \varphi_r$ est une équation de $\mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)}$ sur l'ouvert $\varphi_0^{-1}(\Omega)$, et donc une section de $(\varphi_0)_*\mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)}$ sur l'ouvert Ω. On ne précisera plus par la suite les ouverts de définition des sections.

Propriété 5.2.1. *Soit $\mathcal{I}_r$ un idéal cohérent de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$. L'image $\varphi_r^*\mathcal{I}_r$ est un idéal cohérent de $(\varphi_0)_*\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$, et par conséquent, l'image directe $(\varphi_0^{-1})_*(\varphi_r^*\mathcal{I}_r)$ est un idéal cohérent de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$.*

Démonstration.
- Toute section F de $\varphi_r^*\mathcal{I}_r$ s'écrit $F = \varphi_r^*H = H \circ \varphi_r$, avec H une section de $\mathcal{I}_r$ (on ne précisera pas les ouverts de définition des sections). Aussi, pour toute section E de $(\varphi_0)_*\mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)}$, on a

$$EF = (E \circ \varphi_r^{-1} \circ \varphi_r)(H \circ \varphi_r) = ((E \circ \varphi_r^{-1})H) \circ \varphi_r = \varphi_r^*((E \circ \varphi_r^{-1})H) \in \varphi_r^*\mathcal{I}_r$$

[2] On attache à un morphisme la notation « étoile en haut : * » pour désigner un comorphisme associé, et la notation « étoile en bas : $_*$ » pour désigner l'image directe d'un faisceau par ce morphisme.

parce que $E \circ \varphi_r^{-1} = (\varphi_r^*)^{-1} E \in \mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)}$ et $H \in \mathcal{I}_r$ qui est un idéal de $\mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)}$.
- Le faisceau $\mathcal{I}_r$ est un idéal cohérent de $\mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)}$ donc, par définition, pour tout point $\omega \in (M^*)^2$, il existe un voisinage ouvert Ω de ω dans $(M^*)^2$, un entier $l \in \mathbb{N}^*$ et une suite exacte de faisceaux de $\left(\mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)}\right)_{|\Omega}$-modules de la forme

$$\left(\mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)}\right)^l_{|\Omega} \to (\mathcal{I}_r)_{|\Omega} \to 0$$

Aussi, en appliquant l'isomorphisme de faisceaux φ_r^*, on obtient la suite exacte

$$\left((\varphi_0)_* \mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)}\right)^l_{|(\varphi_0)^{-1}(\Omega)} \to (\varphi_r^* \mathcal{I}_r)_{|(\varphi_0)^{-1}(\Omega)} \to 0$$

ce qui suffit à prouver la cohérence de l'idéal $\varphi_r^* \mathcal{I}_r$ parce que (φ_0) est un homéomorphisme de $(M^*)^2$. □

L'isomorphisme φ_r^* préserve la structure de groupoïde d'ordre r de $J_r^*(M^*, M^*)$. Précisément, on a la :

Propriété 5.2.2. *En reprenant les notations de la définition* 1.2.22*, les comorphismes qui définissent la structure de groupoïde d'ordre r de $J_r^*(M^*, M^*)$ vérifient, avec les comorphismes f^* et φ_r^*, les relations de commutativité suivantes :*
- $\varphi_r^* \circ s^* = s^* \circ f^*$,
- $\varphi_r^* \circ t^* = t^* \circ f^*$,
- $\varphi_r^* \circ c^* = c^* \circ (\varphi_r^* \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{M^*}(M^*)} \varphi_r^*)$,
- $e^* = e^* \circ \varphi_r^*$,
- $\varphi_r^* \circ i^* = i^* \circ \varphi_r^*$,

et par conséquent, pour tout groupoïde $\mathcal{G}_r$ d'ordre r sur M^*, l'idéal cohérent $(\varphi_0^{-1})_* (\varphi_r^* \mathcal{G}_r)$ de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ est un groupoïde d'ordre r sur M^*.

Démonstration. Les relations de commutativité sont des conséquences de la proposition 5.1.2.
Plus précisément, la première relation $\varphi^* \circ s^* = s^* \circ f^*$ correspond au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_M & \xrightarrow{s^*} & s_* \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_r^*} \\ f_* \mathcal{O}_M & \xrightarrow{s^*} & s_* f_* \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} = (\varphi_0)_* s_* \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} \end{array}$$

Dans ce diagramme, tous les faisceaux sont définis sur M^* et les morphismes sont des morphismes de faisceaux de $\mathbb{C}$-algèbres sur M^*.
Précisons le morphisme φ_r^*. Soit U un ouvert de M^* et soit E une section sur l'ouvert U du faisceau $s_* \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$. Par définition du faisceau image directe $s_* \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$, la section E est une équation de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ définie sur l'ouvert $U \times M^*$. L'image par φ_r^* de la section E est l'équation $E \circ \varphi_r$ définie sur l'ouvert $(\varphi_0)^{-1}(U \times M^*) = f^{-1}(U) \times f^{-1}(M^*) = f^{-1}(U) \times M^* = s^{-1}(f^{-1}(U))$. C'est bien une section sur l'ouvert U du faisceau $s_* f_* \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)} = (\varphi_0)_* s_* \mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$.
On pourrait préciser de même les diagrammes commutatifs auxquels correspondent les autres relations de commutativité annoncées.
Grâce aux diagrammes auxquels correspondent les relations de commutativité annoncées, on pourrait vérifier que l'idéal cohérent $(\varphi_0^{-1})_* (\varphi_r^* \mathcal{G}_r)$ de $\mathcal{O}_{J_r^*(M,M)}$ vérifie les conditions *(i)*, *(ii)* et *(iii)* de la définition 1.2.23. □

5.2.2 Transport de la structure de D-groupoïde sur M^*

Proposition 5.2.3. *Soit $\mathcal{G}$ un D-groupoïde sur M^*. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{G}_r = \mathcal{G} \cap \mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)}$. Alors, la limite inductive $(\varphi_0^{-1})_* (\varphi^* \mathcal{G}) = \varinjlim (\varphi_0^{-1})_* (\varphi_r^* \mathcal{G}_r)$ est un D-groupoïde sur M^*.*
De plus, on a dans $Aut(M^*)$ la conjugaison des groupoïdes ensemblistes de solutions suivante :

$$\varphi \left[sol \left((\varphi_0^{-1})_* (\varphi^* \mathcal{G}) \right) \right] = sol(\mathcal{G})$$

Démonstration. Etant donné la propriété 5.2.2, il reste à montrer les trois points suivants :
- On montre d'abord que pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'idéal $\varphi_r^* \mathcal{G}_r$ de $(\varphi_0)_* \mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)}$ est réduit. Soient E un germe de section de $(\varphi_0)_* \mathcal{O}_{J_r^*(M^*,M^*)}$ et $l \in \mathbb{N}^*$ un entier tels que $E^l \in \varphi_r^* \mathcal{I}_r$. Alors, il existe un germe de section F de $\mathcal{I}_r$ tel que $\varphi_r^* F = E^l = (E \circ \varphi_r^{-1} \circ \varphi_r)^l = (E \circ \varphi_r^{-1})^l \circ \varphi_r = \varphi_r^*(E \circ \varphi_r^{-1})^l = \varphi_r^*((\varphi_r^*)^{-1} E)^l$. Aussi, comme le comorphisme φ_r^* est un isomorphisme, on a $((\varphi_r^*)^{-1} E)^l = F \in \mathbb{I}_r$ qui est un idéal réduit, et donc $(\varphi_r^*)^{-1} E \in \mathcal{I}_r$ et donc $E \in \varphi_r^* \mathcal{I}_r$.
- On montre ensuite que l'ídéal $\varinjlim \varphi_r^* \mathcal{G}_r$ de $(\varphi_0)_* \mathcal{O}_{J^*(M^*,M^*)}$ est différentiel. Soit E un germe de section de $\mathcal{I}$ et soit g un difféomorphisme local (formel) de M^*. Alors, d'après la remarque 1.1.43, on a $(D_{y_i}.\varphi^* E).g = \frac{\partial}{\partial y_i}(\varphi^* E.g) = \frac{\partial}{\partial y_i}(E.(\varphi \circ g)) = (D_{y_i}.E).(\varphi \circ g) = \varphi^*(D_{y_i}.E).g$.
- On montre enfin la conjugaison sur les solutions. Soit $g : (M^*, a) \to (M^*, g(a))$ une solution de $(\varphi_0^{-1})_* (\varphi^* \mathcal{G})$. Le germe $\varphi(g)$ est un germe de difféomorphisme local de M^* de source $f(a)$ et de but $f(g(a))$. Soit donc E une équation d'ordre r de la fibre $(\mathcal{G}_r)_{(f(a),f(g(a)))}$. Alors, $E.\varphi(g) = (E \circ \varphi_r).g \equiv 0$ car $E \circ \varphi_r$ s'interprète comme une équation de la fibre $\left[(\varphi_0^{-1})_* (\varphi_r^* \mathcal{G}_r) \right]_{(a,g(a))}$. Cela montre une inclusion. L'inclusion réciproque se prouve par des arguments similaires. □

5.3 Conjugaison des D-groupoïdes de Galois de deux systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants équivalents

Les comorphismes φ_r^* permettent de transporter la structure de D-groupoïde sur M^*. Or, les D-groupoïdes de Galois de systèmes aux q-différences sont des D-groupoïdes définis sur $M = P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ tout entier.

Dans cette partie, on va montrer que dans le cas particulier de deux sytèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants équivalents, pour lesquels le calcul explicite du D-groupoïde de Galois est possible, les comorphismes φ_r^* permettent de conjuguer les restrictions à M^* de leurs D-groupoïdes de Galois. Par conséquent, la conjugaison φ de leurs dynamiques, donnée par la proposition 5.1.3, vaut encore pour les solutions de leurs D-groupoïdes de Galois.

5.3.1 Restriction des D-groupoïdes de Galois

On rappelle que l'on note $\mathcal{G}al(A(z))$ (resp. $\mathcal{G}al(B(z))$) le D-groupoïde de Galois du système aux q-différences $\sigma_q X = AX$ (resp. $\sigma_q X = BX$). C'est, d'après la définition 2.3.1, le plus petit D-groupoïde sur $M = P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ contenant les éléments de la dynamique $Dyn(A(z))$ (resp. $Dyn(B(z))$) parmi ses solutions (dans le sens de la définition 1.2.43).

Proposition 5.3.1. *La restriction $\mathcal{G}al(B(z))_{|(M^*)^2}$ de l'idéal $\mathcal{G}al(B(z))$ de $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}$ à l'ouvert $(M^*)^2$ est un D-groupoïde sur M^* contenant $Dyn(B(z)) \cap Aut(M^*)$ parmi ses solutions, et son image $(\varphi_0^{-1})_* \left(\varphi^* \mathcal{G}al(B(z))_{|(M^*)^2} \right)$ est un D-groupoïde sur M^* contenant $Dyn(A(z)) \cap Aut(M^*)$ parmi ses solutions.*

Démonstration. L'idéal $\mathcal{G}al(B(z))$ de $\mathcal{O}_{J^*(M,M)}$ est un D-groupoïde sur M. On vérifie facilement, en reprenant la définition 1.2.35 de D-groupoïde, que la restriction $\mathcal{G}al(B(z))_{|(M^*)^2}$ est un D-groupoïde sur M^* contenant $Dyn(B(z))$ parmi ses solutions.
D'après la propriété 5.2.3 précédente, l'image $(\varphi_0^{-1})_* \left(\varphi^* \mathcal{G}al(B(z))_{|(M^*)^2} \right)$ est encore un D-groupoïde

sur M^*.
De plus, pour g un élément de $Dyn(A(z)) \cap Aut(M^*)$ et F une équation d'ordre r de $\mathcal{G}al(B(z))_{|(M^*)^2}$, on a, $(\varphi_r^* F).g = (F \circ \varphi_r).g = F.(\varphi(g)) = 0$ parce que, d'après la proposition 5.1.3, le germe de difféomorphisme local $\varphi(g)$ est un élément de $Dyn(B(z)) \cap Aut(M^*)$. □

Néanmoins, cela ne prouve pas que $(\varphi_0^{-1})_* \left(\varphi^* \mathcal{G}al(B(z))_{|(M^*)^2}\right)$ est la restriction du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A(z))$ à l'ouvert $(M^*)^2$. Cette proposition ne permet donc pas à elle seule de comparer, même en restriction à $(M^*)^2$, les D-groupoïdes de Galois $\mathcal{G}al(A(z))$ et $\mathcal{G}al(B(z))$, et par conséquent, leurs solutions respectives.

5.3.2 Conjugaison des D-groupoïdes de Galois de deux systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants équivalents

On suppose maintenant, et pour cette partie seulement, que les systèmes aux q-différences $\sigma_q X = AX$ et $\sigma_q X = BX$ sont à coefficients constants. On note donc $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ les matrices qui les définissent. On note encore $F(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$ une transformation de jauge rationnelle de A vers B, et l'on reprend, avec les mêmes notations, les définitions données dans les parties 5.1 et 5.2 précédentes.

Proposition 5.3.2. *Le plus petit D-groupoïde sur M^*, dans le sens de la définition* 1.2.43*, contenant $Dyn(A) \cap Aut(M^*)$ (resp. $Dyn(B) \cap Aut(M^*)$) parmi ses solutions est la restriction $\mathcal{G}al(A)_{|(M^*)^2}$ (resp. $\mathcal{G}al(B)_{|(M^*)^2}$).*

Démonstration. On reprend les notations introduites dans le théorème 4.2.7. On peut vérifier, par un calcul similaire à celui mené dans la preuve du théorème 4.2.7, que le plus petit D-groupoïde sur M^* contenant $Dyn(A) \cap Aut(M^*)$ parmi ses solutions est le D-groupoïde sur M^* engendré, au sens du théorème 1.2.38, par le groupoïde d'ordre 2 :

$$(\mathcal{G}(A)_2)_{|(M^*)^2} = \left\langle \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} z - \bar{z}, \partial^2 \bar{z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial z}, \frac{\partial \bar{X}}{\partial X} X - \bar{X}, \partial^2 \bar{X}, \tau(I(J)) \right\rangle \subset \mathcal{O}_{J_2^*(M^*, M^*)}$$

D'après la proposition 5.3.1 précédente, la restriction $\mathcal{G}al(A)_{|(M^*)^2}$ est un D-groupoïde sur M^* contenant $Dyn(A) \cap Aut(M^*)$ parmi ses solutions. Le D-groupoïde sur M^* engendré par $(\mathcal{G}(A)_2)_{|(M^*)^2}$ est donc un majorant, dans le sens de la définition 1.2.43, de la restriction $\mathcal{G}al(A)_{|(M^*)^2}$.
Réciproquement, le D-groupoïde $\mathcal{G}al(A)$ contient les équations de $\mathcal{G}(A)_2$, et la restriction $\mathcal{G}al(A)_{|(M^*)^2}$ contient donc les équations de $(\mathcal{G}(A)_2)_{|(M^*)^2}$. La restriction $\mathcal{G}al(A)_{|(M^*)^2}$ est un idéal différentiel réduit, et contient donc le D-groupoïde engendré par $(\mathcal{G}(A)_2)_{|(M^*)^2}$. □

Proposition 5.3.3. *On a :*

$$(\varphi_0^{-1})_* \left(\varphi^* \mathcal{G}al(B)_{|(M^*)^2}\right) = \mathcal{G}al(A)_{|(M^*)^2}$$

et par conséquent,

$$\varphi\left[sol(\mathcal{G}al(A)) \cap Aut(M^*)\right] = sol(\mathcal{G}al(B)) \cap Aut(M^*)$$

Démonstration. D'après la proposition 5.3.2, le D-groupoïde $\mathcal{G}al(A)_{|(M^*)^2}$ est le plus petit D-groupoïde, dans le sens de la définition 1.2.43, contenant $Dyn(A) \cap Aut(M^*)$ parmi ses solutions. D'autre part, d'après la proposition 5.3.1, le D-groupoïde $(\varphi_0^{-1})_* \left(\varphi^* \mathcal{G}al(B)_{|(M^*)^2}\right)$ sur M^* contient $Dyn(A) \cap Aut(M^*)$ parmi ses solutions. Le D-groupoïde $(\varphi_0^{-1})_* \left(\varphi^* \mathcal{G}al(B)_{|(M^*)^2}\right)$ est donc un majorant, dans le sens de la définition 1.2.43, du D-groupoïde $\mathcal{G}al(A)_{|(M^*)^2}$. On a donc l'inclusion d'idéaux de $\mathcal{O}_{J^*(M^*, M^*)}$ suivante :

$$(\varphi_0^{-1})_* \left(\varphi^* \mathcal{G}al(B)_{|(M^*)^2}\right) \subset \mathcal{G}al(A)_{|(M^*)^2}$$

De même, on a l'inclusion suivante :

$$(\varphi_0)_* \left((\varphi^{-1})^* \mathcal{G}al(A)_{|(M^*)^2} \right) \subset \mathcal{G}al(B)_{|(M^*)^2}$$

et donc l'égalité annoncée. □

D'après le lemme 2.1.3.2 de [**?**], p. 17, une transformation de jauge rationnelle entre deux systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants est nécessairement un polynôme de Laurent. Aussi, le lieu singulier de la transformation de jauge $F(z)$ de A vers B est contenu dans $\{0, \infty\}$. On a donc nécessairement $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n \subset M^*$, et donc :

Théorème 5.3.4. *On a :*

$$(\varphi_0^{-1})_* \left(\varphi^* \mathcal{G}al(B)_{|(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n)^2} \right) = \mathcal{G}al(A)_{|(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n)^2}$$

et par conséquent,

$$\varphi \left[sol(\mathcal{G}al(A)) \cap Aut(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n) \right] = sol(\mathcal{G}al(B)) \cap Aut(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n)$$

5.3.3 Exemples

L'équation des constantes

Soit $l \in \mathbb{Z}$. Les solutions du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(q^l)$ de l'équation $x(qz) = q^l x(z)$ sont les germes de difféomorphismes locaux de la forme $(z, x) \mapsto (\alpha z, \alpha^l x)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Les solutions du D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(1)$ de l'équation des constantes $x(qz) = x(z)$ sont les germes de difféomorphismes locaux de la forme $(z, x) \mapsto (\alpha z, x)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$.
Une transformation de jauge de 1 vers q^l est z^l. Son lieu singulier est $\{0, \infty\} \subset P^1\mathbb{C}$.
On peut vérifier que sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, on a $[(z, x) \mapsto (z, z^l x)] \circ [(z, x) \mapsto (\alpha z, x)] \circ [(z, x) \mapsto (z, z^{-l} x)] = [(z, x) \mapsto (\alpha z, (\alpha z)^l z^{-l} x)] = [(z, x) \mapsto (\alpha z, \alpha^l x)]$,
ce que l'on note

$$[(z, x) \mapsto (z, z^l x)] \circ sol(\mathcal{G}al(1) \circ [(z, x) \mapsto (z, z^l x)]^{-1} = sol(\mathcal{G}al(q^l)$$

Les équations des caractères

Plus généralement, pour deux équations de caractères équivalentes d'exposants $a, b \in \mathbb{C}^*$ tels que $b = q^l a$, avec $l \in \mathbb{Z}$, on peut vérifier, en distinguant selon que $a \in \mu_\infty q^{\mathbb{Z}}$ ou que $a \notin \mu_\infty q^{\mathbb{Z}}$, que l'on a

$$[(z, x) \mapsto (z, z^l x)] \circ sol(\mathcal{G}al(a) \circ [(z, x) \mapsto (z, z^l x)]^{-1} = sol(\mathcal{G}al(b)$$

Le système du logarithme

Les solutions du D-groupoïde de Galois du système du logarithme $\sigma_q X = LX$, avec $L = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right)$, sont les germes de difféomorphismes locaux de la forme de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \left(\begin{smallmatrix} 1+\beta & -\beta \\ \beta & 1-\beta \end{smallmatrix} \right) X)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$.
Les solutions du D-groupoïde de Galois du système du logarithme $\sigma_q X = UX$, avec $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$, sont les germes de difféomorphismes locaux de la forme de $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ de la forme $(z, X) \mapsto (\alpha z, \left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) X)$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$.
Une transformation de jauge de U vers L est P, avec $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right)$. Son lieu singulier est $S(P) = \emptyset$.
On peut vérifier que sur $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$, on a $[(z, X) \mapsto (z, PX)] \circ [(z, X) \mapsto (\alpha z, \left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) X)] \circ [(z, X) \mapsto (z, P^{-1} X)] = [(z, X) \mapsto (\alpha z, P \left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) P^{-1} X)] = [(z, X) \mapsto (\alpha z, \left(\begin{smallmatrix} 1+\beta & -\beta \\ \beta & 1-\beta \end{smallmatrix} \right) X)]$,
ce que l'on note

$$[(z, X) \mapsto (z, PX)] \circ \mathcal{G}al(U) \circ [(z, X) \mapsto (z, PX)]^{-1} = \mathcal{G}al(L)$$

5.4 Un D-groupoïde de Galois local pour les systèmes aux q-différences fuchsiens

Dans cette dernière partie, on définit un D-groupoïde de Galois local pour les systèmes aux q-différences fuchsiens.

La première définition que l'on donne repose sur le théorème 5.3.4, qui établit une conjugaison entre les D-groupoïdes de Galois de deux systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants équivalents. Cette définition est comparable à la définition de [**?**] d'un groupe de Galois local pour les systèmes aux q-différences fuchsiens par ses différentes réalisations. Elle permet de retrouver, en considérant les solutions qui fixent les transversales, le groupe de Galois du système.

Ensuite, on va donner une définition plus naturelle d'un D-groupoïde de Galois local pour les systèmes aux q-différences fuchsiens. On définit le D-groupoïde de Galois local d'un système aux q-différences fuchsien comme le plus petit D-groupoïde sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ contenant les éléments de la dynamique du système parmi ses solutions. La justification de cette définition, et sa compatibilité avec la première définition que l'on donne, repose sur un résultat encore conjectural. On l'énoncera. Ce résultat permettrait aussi de retrouver, parmi les solutions qui fixent les transversales du D-groupoïde de Galois global d'un système aux q-différences fuchsien en 0 et en ∞, une partie dense du groupe de Galois.

5.4.1 Le groupe de Galois local d'un système aux q-différences fuchsien

Dans cette partie, on commence par rappeler la définition de [**?**], 2, du groupe de Galois d'un système aux q-différences fuchsien.
On expliquera ensuite en quoi est-ce que le théorème 5.3.4 permet de définir un D-groupoïde de Galois local pour un système aux q-différences fuchsien, qui redonne, en considérant les solutions qui fixent les transversales, le groupe de Galois local du système.

Le groupe de Galois local d'un système aux q-différences fuchsien

Étant donné la définition 2.1.4 et la remarque 2.1.5, on peut dire qu'un système aux q-différences linéaire rationnel $\sigma_q X = AX$, défini par une matrice $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, est fuchsien en 0 s'il existe une matrice constante $A^{(0)} \in GL_n(\mathbb{C})$, et une transformation de jauge locale $F^{(0)}(z) \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ de $A(z)$ vers $A^{(0)}$, telles que

$$A^{(0)} = (\sigma_q F^{(0)}) A (F^{(0)})^{-1}$$

Cela justifie la définition ci-dessous de la catégorie des systèmes aux q-différences fuchsiens en 0.

Définition 5.4.1. *On note $\mathcal{E}_f^{(0)}$ la catégorie dont les objets sont les couples $(\mathbb{C}^n, A(z))$ constitués d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et d'une matrice $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$ qui définit un système aux q-différences fuchsien en 0, et dont les morphismes d'un objet $(\mathbb{C}^n, A(z))$ vers un objet $(\mathbb{C}^p, B(z))$ sont les matrices $F(z) \in M_{p,n}(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ telles que $BF(qz) = F(z)A$ dans $M_{p,n}(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$.*

Cette catégorie contient, comme sous-catégorie essentielle pleine, la catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$ notée $\mathcal{P}$, définie dans la partie 4.3.2, des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants.
Cette équivalence de catégories permet de définir le groupe de Galois local d'un système aux q-différences fuchsien en donnant ses différentes réalisations, à savoir les groupes de Galois des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants qui lui sont localement équivalents.

Définition 5.4.2. *Soit $\sigma_q X = AX$, avec $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, un système aux q-différences fuchsien en 0. Une réalisation du groupe de Galois local de ce système, noté $Gal^{(0)}(A)$, est le groupe de Galois*

$Gal(A^{(0)})$ d'un système aux q-différences $\sigma_q X = A^{(0)}X$ linéaire à coefficients constants qui lui est localement équivalent.

Propriété 5.4.3. *Soient $\sigma_q X = AX$ et $\sigma_q X = BX$, avec $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$, deux systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants. Soit $F(z) \in GL_n(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$ une transformation de jauge rationnelle de A vers B. Alors, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$, on a la conjugaison des groupes de Galois suivante :*

$$F(z_0)Gal(A)F(z_0)^{-1} = Gal(B)$$

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. On considère la catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$ des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants munie du foncteur fibre ω_{z_0}. On considère (γ, λ) un élément du groupe de Galois Gal (donné par la définition 4.3.18) de la catégorie $\mathcal{P}$. Cet élément définit un automorphisme tensoriel $\Phi_{(\gamma,\lambda)} \in Aut^{\otimes}(\omega_{z_0})$. D'après la définition 4.3.16, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\omega_{z_0}(\mathbb{C}^n, A) \arrow[r, "\Phi_{(\gamma,\lambda)}(A)"] \arrow[d, "\omega_{z_0}(F(z))"'] & \omega_{z_0}(\mathbb{C}^n, A) \arrow[d, "\omega_{z_0}(F(z))"] \\
\omega_{z_0}(\mathbb{C}^n, B) \arrow[r, "\Phi_{(\gamma,\lambda)}(B)"] & \omega_{z_0}(\mathbb{C}^n, B)
\end{tikzcd}$$

qui se traduit par la relation :

$$F(z_0)\gamma(A_s)A_u^{\lambda} = \gamma(B_s)B_u^{\lambda}F(z_0)$$

et entraîne la conjugaison suivante des groupes de Galois :

$$F(z_0)Gal(A)F(z_0)^{-1} = Gal(B)$$

□

Soit $\sigma_q X = AX$, avec $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, un système aux q-différences fuchsien en 0. La propriété 5.4.3 précédente, qui est une conséquence directe de la définition du groupe de Galois d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants, assure que les différentes réalisations du groupe de Galois local $Gal^{(0)}(A)$ du système $\sigma_q X = AX$ sont conjuguées.

En effet, soient deux matrices $A_1^{(0)}, A_2^{(0)} \in GL_n(\mathbb{C})$ qui définissent des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants localement équivalents en 0 au système $\sigma_q X = AX$.
On considère respectivement deux transformations de jauge $F_1^{(0)}(z), F_2^{(0)}(z) \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ de $A(z)$ vers respectivement $A_1^{(0)}$ et $A_2^{(0)}$. On peut vérifier que la matrice $F(z) = F_2^{(0)}(z)F_1^{(0)}(z)^{-1}$ est une transformation de jauge rationnelle de $A_1^{(0)}$ vers $A_2^{(0)}$.

$$\begin{tikzcd}
 & A_1^{(0)} \arrow[dd, "F(z)"] \\
A(z) \arrow[ur, "F_1^{(0)}(z)"] \arrow[dr, "F_2^{(0)}(z)"'] & \\
 & A_2^{(0)}
\end{tikzcd}$$

Alors, d'après la propriété 5.4.3 précédente, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$, on a la conjugaison

$$F(z_0)Gal(A_1^{(0)})F(z_0)^{-1} = Gal(A_2^{(0)})$$

Les différentes réalisations du groupe de Galois local d'un système aux q-différences fuchsien sont donc conjuguées.

Un D-groupoïde de Galois local pour un système aux q-différences fuchsien

De la même façon que l'on définit, en donnant ses différentes réalisations, le groupe de Galois local d'un système aux q-différences fuchsien, on peut définir le D-groupoïde de Galois local d'un système aux q-différences fuchsien.

Définition 5.4.4. *Soit $\sigma_q X = AX$, avec $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, un système aux q-différences fuchsien en 0. Une réalisation du D-groupoïde de Galois local de ce système est le D-groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A^{(0)})$ d'un système aux q-différences $\sigma_q X = A^{(0)}X$ linéaire à coefficients constants qui lui est localement équivalent.*

D'après le théorème 5.3.4, les différentes réalisations du D-groupoïde de Galois local sont conjuguées.

Soit $\sigma_q X = AX$, avec $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, un système aux q-différences fuchsien en 0, et l'on reprend les notations de la fin de la partie précédente.
D'après le théorème 5.3.4, on a sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$:

$$[(z,X) \mapsto (z, F(z)X)] \circ sol(\mathcal{G}al(A_1^{(0)})) \circ [(z,X) \mapsto (z, F(z)X)]^{-1} = sol(\mathcal{G}al(A_2^{(0)}))$$

En considérant les solutions qui fixent les transversales, on a

$$[(z,X) \mapsto (z, F(z)X)] \circ sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(A_1^{(0)})) \circ [(z,X) \mapsto (z, F(z)X)]^{-1} = sol(\widetilde{\mathcal{G}al}(A_2^{(0)}))$$

et l'on retrouve donc, en utilisant le théorème 4.4.1, que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$,

$$F(z_0)Gal(A_1^{(0)})F(z_0)^{-1} = Gal(A_2^{(0)})$$

Proposition 5.4.5. *Les différentes réalisations du D-groupoïde de Galois local d'un système aux q-différences fuchsien redonnent, en considérant les solutions qui fixent les transversales, les différentes réalisations du groupe de Galois local du système.*

5.4.2 Un D-groupoïde de Galois local explicite pour un système aux q-différences fuchsien

Dans cette partie, on définit un D-groupoïde de Galois local explicite pour les systèmes aux q-différences fuchsiens. On énoncera la conjecture qui justifie complètement cette définition, ainsi que ses conséquences.

Un D-groupoïde de Galois local explicite pour un système aux q-différences fuchsien

Définition 5.4.6. *On appellera D-groupoïde de Galois local en 0 d'un système aux q-différences $\sigma_q X = AX$, avec $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, fuchsien en 0, la D-enveloppe sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, dans le sens de la définition 1.2.43, de la restriction $Dyn(A) \cap Aut(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)$ de la dynamique du système à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. C'est encore, dans le sens de la définition 1.2.43, le plus petit D-groupoïde sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ contenant $Dyn(A) \cap Aut(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n)$ parmi ses solutions.*
On notera $\mathcal{G}al^{(0)}(A)$ l'idéal de $\mathcal{O}_{J^*(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n, \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)}$ qui le définit.

Proposition 5.4.7. *Pour un système aux q-différences $\sigma_q X = AX$, avec $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, fuchsien en 0, le D-groupoïde de Galois local peut être considéré comme un D-sous-groupoïde, dans le sens de la définition 1.2.43, du D-groupoïde de Galois global. Plus précisément, on a les inclusions :*

$$\mathcal{G}al(A)_{|\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n} \subset \mathcal{G}al^{(0)}(A)$$

et

$$sol(\mathcal{G}al^{(0)}(A)) \subset sol(\mathcal{G}al(A))$$

Démonstration. Le D-groupoïde $\mathcal{G}al(A)_{|\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n}$ est un D-groupoïde sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ contenant $Dyn(A)\cap Aut(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)$ parmi ses solutions. D'autre part, le D-groupoïde $\mathcal{G}al^{(0)}(A)$ est le plus petit D-groupoïde sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ contenant $Dyn(A)\cap Aut(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)$ parmi ses solutions. Aussi, d'après la définition 1.2.43, le D-groupoïde $\mathcal{G}al^{(0)}(A)$ est un D-sous-groupoïde du D-groupoïde $\mathcal{G}al(A)_{|\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n}$. □

La définition 5.4.6 est complètement justifiée dans le cas constant par la proposition 5.4.8 et le corollaire 5.4.9 ci-dessous.

Proposition 5.4.8. *Le D-groupoïde de Galois local d'un système aux q-différences linéaire à coefficients constants $\sigma_q X = AX$, avec $A\in GL_n(\mathbb{C})$, est*

$$\mathcal{G}al^{(0)}(A) = \mathcal{G}al(A)_{|(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n)^2}$$

Démonstration. La preuve est similaire à la preuve de la proposition 5.3.2. □

Corollaire 5.4.9. *Pour un système aux q-différences linéaire à coefficients constants, les deux définitions* 5.4.4 *et* 5.4.6 *de D-groupoïde de Galois local sont compatibles, et les solutions du D-groupoïde de Galois local $\mathcal{G}al^{(0)}(A)$ qui fixent les transversales redonnent le groupe de Galois local du système.*

Démonstration. La compatibilité entre les deux définitions est assurée par la proposition 5.4.8 ci-dessus et la propriété 5.4.3.
La proposition 5.4.8 ci-dessus et le théorème 4.4.2 assurent que les solutions du D-groupoïde de Galois local qui fixent les transversales redonnent le groupe de Galois local du système. □

Conjecture

On considère $\sigma_q X = AX$, avec $A(z)\in GL_n(\mathbb{C}(z))$, un système aux q-différences fuchsien en 0. On considère une matrice $A^{(0)}\in GL_n(\mathbb{C})$ qui définit un système aux q-différences linéaire à coefficients constants localement équivalent en 0 au système $\sigma_q X = AX$, et une transformation de jauge $F^{(0)}(z)\in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ de $A(z)$ vers $A^{(0)}$.

De façon analogue à ce qui a été défini dans les parties 5.1 et 5.2, on note $M=\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$, $M^* = (\mathbb{C}\setminus S(F^{(0)}))\times\mathbb{C}^n$. On note $S(F^{(0)})$ le lieu singulier de la matrice $F^{(0)}(z)$, c'est-à-dire le sous-ensemble discret de $\mathbb{C}$ formé des pôles de $F^{(0)}(z)$ et des pôles de $F^{(0)}(z)^{-1}$.
On note $f^{(0)}$ le difféomorphisme (holomorphe global) de M^* défini par $(z,X)\mapsto(z,F^{(0)}(z)X)$.
On note $\varphi^{(0)}$ l'automorphisme du groupoïde $Aut(M^*)$ défini par $g\mapsto f^{(0)}\circ g\circ(f^{(0)})^{-1}$ et qui conjugue les dynamiques :

$$\varphi^{(0)}[Dyn(A(z))\cap Aut(M^*)] = Dyn(A^{(0)})\cap Aut(M^*)$$

On propose la :

Conjecture 5.4.10. *On a :*

$$((\varphi^{(0)})_0^{-1})_*\left((\varphi^{(0)})^*\mathcal{G}al^{(0)}(A^{(0)})_{|(M^*)^2}\right) = \mathcal{G}al^{(0)}(A)_{|(M^*)^2}$$

et par conséquent,

$$\varphi^{(0)}\left[sol(\mathcal{G}al^{(0)}(A))\cap Aut(M^*)\right] = sol(\mathcal{G}al^{(0)}(A^{(0)}))\cap Aut(M^*)$$

Cette conjecture est, dans un cadre local, une généralisation du théorème 5.3.4.

Démonstration incomplète. De façon analogue à la preuve de la proposition 5.3.2, on arrive à montrer une inclusion dans chacune de ces deux égalités. En effet, l'image

$$((\varphi^{(0)})_0)_* \left(((\varphi^{(0)})^{-1})^* \mathcal{G}al^{(0)}(A)_{|(M^*)^2} \right)$$

est un D-groupoïde sur M^* contenant $Dyn(A^{(0)}) \cap Aut(M^*)$ parmi ses solutions. D'autre part, on peut vérifier que le D-groupoïde

$$\mathcal{G}al^{(0)}(A^{(0)})_{|(M^*)^2}$$

est le plus petit D-groupoïde sur M^*, dans le sens de la définition 1.2.43, qui contient $Dyn(A^{(0)}) \cap Aut(M^*)$ parmi ses solutions. Aussi, on a les inclusions :

$$((\varphi^{(0)})_0)_* \left(((\varphi^{(0)})^{-1})^* \mathcal{G}al^{(0)}(A)_{|(M^*)^2} \right) \subset \mathcal{G}al^{(0)}(A^{(0)})_{|(M^*)^2}$$

ce qui est équivalent à :

$$\mathcal{G}al^{(0)}(A)_{|(M^*)^2} \subset ((\varphi^{(0)})_0^{-1})_* \left((\varphi^{(0)})^* \mathcal{G}al^{(0)}(A^{(0)})_{|(M^*)^2} \right)$$

et donc :

$$(sol(\mathcal{G}al^{(0)}(A^{(0)})) \cap Aut(M^*)) \subset \varphi^{(0)} \left[sol(\mathcal{G}al^{(0)}(A)) \cap Aut(M^*) \right]$$

La preuve de ces inclusions utilise de façon cruciale le fait que l'on sait calculer explicitement le D-groupoïde de Galois local $\mathcal{G}al^{(0)}(A^{(0)})$, et ainsi obtenir une condition de minimalité sur :

$$\mathcal{G}al^{(0)}(A^{(0)})_{|(M^*)^2}$$

Réciproquement, on ne sait pas obtenir de condition de minimalité sur le D-groupoïde

$$((\varphi^{(0)})_0^{-1})_* \left((\varphi^{(0)})^* \mathcal{G}al^{(0)}(A^{(0)})_{|(M^*)^2} \right)$$

et donc le comparer au plus petit D-groupoïde sur M^* contenant $Dyn(A) \cap Aut(M^*)$ parmi ses solutions. □

Conséquences de la conjecture

La véracité de cette conjecture permettrait d'obtenir les résultats qui suivent.

Le corollaire qui suit assure la compatibilité entre les deux définitions proposées pour le D-groupoïde de Galois local d'un système aux q-différences fuchsien.

Corollaire 5.4.11. *Pour un système aux q-différences $\sigma_q X = AX$, avec $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, fuchsien en* 0*, les définitions* 5.4.4 *et* 5.4.6 *de D-groupoïde de Galois local sont compatibles.*

Démonstration. La compatibilité entre les deux définitions est assurée par la conjecture 5.4.10 et la définition 5.4.2 du groupe de Galois local d'un système aux q-différences fuchsien. □

La proposition qui suit assure que le D-groupoïde de Galois local d'un système aux q-différences fuchsien redonne, en considérant les évaluations des solutions qui fixent les transversales, un groupe conjugué au groupe de Galois du système.

Proposition 5.4.12. *Les solutions de la restriction $\mathcal{G}al^{(0)}(A)_{|(M^*)^2}$ du D-groupoïde de Galois local du système $\sigma_q X = AX$, sont les germes de difféomorphismes locaux de M^* de la forme*

$$(z, X) \mapsto (\gamma(q)z, F^{(0)}(\gamma(q)z)\gamma(A_s^{(0)})(A_u^{(0)})^\lambda F^{(0)}(z)^{-1}X)$$

pour tout $(\gamma, \lambda) \in \mathbb{Z}^{alg}$.
Aussi, pour tout $z_0 \in M^*$, *l'évaluation au point* z_0 *du groupe de solutions au-dessus de* z_0 *donne le groupe*

$$F^{(0)}(z_0)Gal^{(0)}(A^{(0)})F^{(0)}(z_0)^{-1}$$

qui est conjugué à la réalisation $Gal^{(0)}(A^{(0)})$ *du groupe de Galois local* $Gal^{(0)}(A)$ *du système.*

Démonstration. La forme des solutions vient du calcul explicite de la conjugaison des solutions des D-groupoïdes de Galois locaux $Gal^{(0)}(A)$ et $Gal^{(0)}(A^{(0)})$ donnée par la conjecture 5.4.10. Le résultat qui suit est obtenu par évaluation au point z_0 des solutions qui fixent les transversales. □

Vers un théorème de densité

Le résultat ci-dessous repose lui aussi sur la conjecture 5.4.10. Il permet de retrouver, parmi les solutions qui fixent les transversales du D-groupoïde de Galois global d'un système aux q-différences fuchsien en 0 et ∞, une partie dense du groupe de Galois. Il constitue donc une première étape vers un analogue du théorème de densité de type Schlesinger obtenu par Sauloy dans [**?**], 3.1.2.3. et énoncé dans l'introduction de cette thèse.

On considère $\sigma_q X = AX$, avec $A(z) \in GL_n(\mathbb{C}(z))$, un système aux q-différences fuchsien en 0 et en ∞. On note $S(A)$ son lieu singulier, c'est-à-dire l'ensemble formé des pôles de $A(z)$ et des pôles de $A(z)^{-1}$.
On considère respectivement deux matrices $A^{(0)}, A^{(\infty)} \in GL_n(\mathbb{C})$ qui définissent des systèmes aux q-différences linéaires à coefficients constants localement équivalents au système $\sigma_q X = AX$ en respectivement 0 et ∞. On note respectivement $F^{(0)} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ et $F^{(\infty)} \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty))$ deux transformations de jauge respectivement de $A(z)$ vers $A^{(0)}$ et de $A(z)$ vers $A^{(\infty)}$.
L'union des lieux singuliers des matrices $F^{(0)}(z)$ et $F^{(\infty)}(z)$ est contenu dans $\{0\} \cup \{\infty\} \cup q^{\mathbb{Z}}S(A)$.
On note $M^* = \mathbb{C}^* \setminus q^{\mathbb{Z}}S(A)$.

Proposition 5.4.13. *Les solutions de la restriction* $\mathcal{G}al(A)_{|(M^*)^2}$ *du* D*-groupoïde de Galois (global) du système* $\sigma_q X = AX$ *qui fixent les transversales de* $P^1\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ *contiennent les germes de difféomorphismes locaux de* M^* *de la forme*

$$(z, X) \mapsto \left(z, F^{(\infty)}(z)\left[\gamma(A_s^{(\infty)})(A_u^{(\infty)})^\lambda\right]^{-1} F^{(\infty)}(\gamma(q)z)^{-1}F^{(0)}(\gamma(q)z)\left[\gamma(A_s^{(0)})(A_u^{(0)})^\lambda\right] F^{(0)}(z)^{-1}X\right)$$

pour tout $(\gamma, \lambda) \in \mathbb{Z}^{alg}$.
Aussi, pour tout $z_0 \in M^*$, *l'évaluation au point* z_0 *du groupe de solutions au-dessus de* z_0 *donne le groupe*

$$\bigcup_{z_1 \in M^*} F^{(\infty)}(z_0)Gal^{(\infty)}(A^{(\infty)})(z_1, z_0)F^{(\infty)}(z_1)^{-1}F^{(0)}(z_1)Gal^{(0)}(A^{(0)})(z_0, z_1)F^{(0)}(z_0)^{-1}$$

qui est conjugué à la partie Zariski-dense

$$\bigcup_{z_1 \in M^*} F^{(0)}(z_0)^{-1}F^{(\infty)}(z_0)Gal^{(\infty)}(A^{(\infty)})(z_1, z_0)F^{(\infty)}(z_1)^{-1}F^{(0)}(z_1)Gal^{(0)}(A^{(0)})(z_0, z_1)$$

d'une réalisation du groupe de Galois global $Gal(A)$ *du système* $\sigma_q X = AX$ *défini dans [**?**], 3.*

Démonstration. D'après la proposition 5.4.7, les solutions des D-groupoïdes de Galois locaux $\mathcal{G}al^{(0)}(A)$ et $\mathcal{G}al^{(\infty)}(A)$ du système fuchsien $\sigma_q X = AX$ sont des solutions du D-groupoïde de Galois global $\mathcal{G}al(A)$. Leurs descriptions découlent de la conjecture 5.4.10 et sont rappelées dans la proposition 5.4.12. De plus, comme $sol(\mathcal{G}al(A))$ est un groupoïde ensembliste, elles peuvent être

composées pour donner encore une solution du D-groupoïde de Galois global $\mathcal{G}al(A)$ du système. Pour obtenir le résultat de la proposition on conjugue

$$(z, X) \mapsto (\gamma(q)z, F^{(0)}(\gamma(q)z)\gamma(A_s^{(0)})(A_u^{(0)})^{\lambda}F^{(0)}(z)^{-1}X)$$

et l'inverse de

$$(z, X) \mapsto (\gamma(q)z, F^{(\infty)}(\gamma(q)z)\gamma(A_s^{(\infty)})(A_u^{(\infty)})^{\lambda}F^{(\infty)}(z)^{-1}X)$$

données par un même élément $(\gamma, \lambda) \in \mathbb{Z}^{alg}$.
Le théorème 3.1.2.3. de [?] assure que le groupe

$$\bigcup_{z_1 \in M^*} F^{(0)}(z_0)^{-1}F^{(\infty)}(z_0)Gal^{(\infty)}(A^{(\infty)})(z_1, z_0)F^{(\infty)}(z_1)^{-1}F^{(0)}(z_1)Gal^{(0)}(A^{(0)})(z_0, z_1)$$

est une partie Zariski-dense du groupe de Galois $Gal(A)$ du système $\sigma_q X = AX$. □

Aussi, le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences fuchsien en 0 et ∞ donne, en évaluant les solutions qui fixent les transversales, un partie Zariski-dense du groupe de Galois.

Bibliographie

[AF87] Jean-Marie Arnaudiès and Henri Fraysse. *Cours de mathématiques. 1.* Dunod Université : Ouvrages de Base. Dunod, Paris, 1987. Algèbre.

[Bir30] George D. Birkhoff. Formal theory of irregular linear difference equations. *Acta Math.*, 54(1) :205–246, 1930.

[Bou71] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXVI. Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats (Paragraphes 8 à 15).* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1347. Hermann, Paris, 1971.

[Cas04a] Guy Casale. $\mathcal{D}$-enveloppe d'un difféomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 13(4) :515–538, 2004.

[Cas04b] Guy Casale. Sur le groupoïde de galois d'un feuilletage. *Thèse*, 2004.

[CLO07] David Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, third edition, 2007. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.

[DMOS82] Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, and Kuang-yen Shih. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, volume 900 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[God73] Roger Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Hermann, Paris, 1973. Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252.

[GR90] George Gasper and Mizan Rahman. *Basic hypergeometric series*, volume 35 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990. With a foreword by Richard Askey.

[Gro62] Alexander Grothendieck. Techniques de construction en géométrie analytique. Ii. généralités sur les espaces annelés et les espaces analytiques. In *Séminaire H. Cartan, 13 (1960/61)*, page Exp. No. 9. ENS, Paris, 1962.

[Hou62] Christian Houzel. Géométrie analytique locale. In *Séminaire H. Cartan, 13 (1960/61)*, pages Exp. No. 18–21. ENS, Paris, 1962.

[Hum75] James E. Humphreys. *Linear algebraic groups.* Springer-Verlag, New York, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21.

[Mal00] Bernard Malgrange. La variété caractéristique d'un système différentiel analytique. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(2) :491–518, 2000.

[Mal01] Bernard Malgrange. Le groupoïde de Galois d'un feuilletage. In *Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2*, volume 38 of *Monogr. Enseign. Math.*, pages 465–501. Enseignement Math., Geneva, 2001.

[Mal05] Bernard Malgrange. *Systèmes différentiels involutifs*, volume 19 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses].* Société Mathématique de France, Paris, 2005.

[Sau99] Jacques Sauloy. Théorie de galois des équations aux q-différences fuchsiennes. *Thèse*, 1999.

[Sau00a] Jacques Sauloy. Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(4) :1021–1071, 2000.

[Sau00b] Jacques Sauloy. Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : solutions canoniques, classification, matrice de connexion et monodromie. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(4) :1021–1071, 2000.

[Sau03] Jacques Sauloy. Galois theory of Fuchsian q-difference equations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36(6) :925–968 (2004), 2003.

[vdPS97] Marius van der Put and Michael F. Singer. *Galois theory of difference equations*, volume 1666 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[vdPS03] Marius van der Put and Michael F. Singer. *Galois theory of linear differential equations*, volume 328 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Zis96] Michel Zisman. *Mathématiques pour l'agrégation*. Dunod, 1996.

TITRE DE LA THÈSE EN ANGLAIS : A Galois D-groupoid for q-difference equations

RÉSUMÉ DE LA THÈSE EN ANGLAIS :
The subject of the thesis is to define a Galois D-groupoid for q-difference equations, and to legitimate this definition comparing what is obtained in the linear case with the usual Galois group. We first recall and illustrate the notion of Malgrange's D-groupoid, and we define the Galois D-groupoid of a q-difference system as the D-envelope of the dynamics. We get an upper bound for the Galois D-groupoid of a linear q-difference system, and we describe some transversal groups which are the candidates to give the usual Galois group. We compute the Galois D-groupoid of a constant linear q-difference system, and we show that in this case the transversal groups correspond to the Galois group. We establish a correspondence between the Galois D-groupoids of two equivalent constant linear q-difference systems, and we define a local Galois D-groupoid for Fuchsian q-difference systems.

AUTEUR : Anne GRANIER

TITRE : Un D-groupoïde de Galois pour les équations aux q-différences

DIRECTEURS DE THÈSE : Emmanuel PAUL, Jacques SAULOY

LIEU ET DATE DE SOUTENANCE : Toulouse, 06/07/2009

RÉSUMÉ DE LA THÈSE :
L'objet de cette thèse est de définir un D-groupoïde de Galois pour les équations aux q-différences et de justifier cette définition en comparant l'objet obtenu dans le cas linéaire au groupe de Galois usuel. On commence par rappeller et illustrer la notion de D-groupoïde de Malgrange et l'on définit le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences comme la D-enveloppe de sa dynamique. On met en évidence un majorant pour le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire et l'on exhibe des groupes transverses candidats à redonner le groupe de Galois. On calcule le D-groupoïde de Galois d'un système aux q-différences linéaire constant et l'on montre dans ce cas que les groupes transverses correspondent au groupe de Galois. On établit une correspondance entre les D-groupoïdes de Galois de deux systèmes aux q-différences linéaires constants équivalents et l'on définit un D-groupoïde de Galois local pour les systèmes aux q-différences fuchsiens.

MOTS-CLÉS :
- équations aux q-différences
- théorie de Galois différentielle
- groupoïde de Malgrange

DISCIPLINE : mathématiques fondamentales

INTITULÉ ET ADRESSE DU LABORATOIRE :
Institut de Mathématiques de Toulouse, UMR 5219
Université Paul Sabatier, Toulouse III
31062 Toulouse, Cedex 9